

MATHEMATIQUES POUR L'ECONOMIE

LICENCE ECONOMIE GESTION. COURS DE DEUXIÈME ANNÉE

Lionel Truquet

2011-2012

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Un problème d'optimisation d'une fonction d'une variables	6
1.2	Un problème d'optimisation d'une fonction de deux variables	6
1.3	Un problème d'optimisation sous contrainte égalité	6
1.4	Un exemple de modèle entrée-sortie (ou modèle de Leontief)	6
2	Les matrices	7
2.1	Les matrices : addition et multiplication	7
2.2	Autres opérations sur les matrices, matrices particulières	10
2.3	Inversion de matrices. Systèmes d'équations linéaires. Pivot de Gauss	12
2.3.1	Inverser une matrice en utilisant la méthode du pivot de Gauss	12
2.3.2	La résolution des systèmes linéaires d'équations	15
3	Points et vecteurs de \mathbb{R}^n	19
3.1	Introduction	19
3.2	Points et vecteurs de \mathbb{R}^n	19
3.3	Sous-espaces vectoriels et sous-espaces affines de \mathbb{R}^n	23
3.4	Systèmes libres. Systèmes générateurs. Base.	25
3.5	Rang d'un système de vecteurs. Rang d'une matrice.	27
3.6	Hyperplans de \mathbb{R}^n	30
3.7	Applications linéaires	31
3.8	Formes quadratiques	32
4	Fonctions de plusieurs variables. Calcul différentiel	33
4.1	Quelques rappels sur les fonctions d'une variable	33
4.1.1	Dérivée d'une fonction	33
4.1.2	Taux de croissance instantané, élasticité	35
4.2	Topologie de \mathbb{R}^n . Continuité d'une fonction de plusieurs variables	35
4.3	Dérivation des fonctions de plusieurs variables	37
4.3.1	Fonction de deux variables et à valeurs réelles	37
4.3.2	Fonction de n variables et à valeurs réelles	38
4.3.3	Les fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p	39
4.3.4	Développement limité à l'ordre 1	39
4.3.5	Différentielle d'une composée de fonctions	40
4.3.6	Productivités marginales, élasticités partielles et fonctions homogènes	42
4.4	Surfaces. Plan tangent. Théorème des fonctions implicites	43
4.4.1	Plan tangent au graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	43
4.4.2	Hypersurfaces de \mathbb{R}^n	45
4.4.3	Le théorème des fonctions implicites	47

4.5	Dérivées partielles d'ordre supérieur. Formule de Taylor à l'ordre 2	49
5	Les déterminants	51
5.1	Définition du déterminant et premières propriétés	51
5.1.1	Expression du déterminant pour une matrice de type $(2, 2)$	53
5.1.2	Expression du déterminant pour une matrice $(3, 3)$	53
5.1.3	Cas général : développement du déterminant suivant une ligne ou une colonne	55
5.2	Application à la résolution des systèmes linéaires	60
5.3	Application au calcul de l'inverse d'une matrice carrée	60
5.4	Valeurs propres d'une matrice carrée	61
5.4.1	Diagonalisation d'une matrice carrée	61
5.5	Étude du signe d'une forme quadratique	64
5.5.1	Valeurs propres et signe d'une forme quadratique	64
5.5.2	Signe d'une forme quadratique : le critère des mineurs	65
6	Optimisation des fonctions de plusieurs variables	67
6.1	Les extrema sans contrainte	67
6.2	Extremum local sans contrainte. Condition nécessaire du premier ordre.	68
6.3	Les fonctions convexes ou concaves	68
6.4	Optimisation sans contrainte : les conditions suffisantes du second ordre	71
6.5	Extrema liés : conditions du premier ordre pour des contraintes égalités	73
6.5.1	Le cas d'une fonction de deux variables et d'une seule contrainte	74
6.5.2	Cas général	76
6.5.3	Le point de vue du Lagrangien	77
6.6	Extrema liés : conditions suffisantes du second ordre pour des contraintes égalités	79

Chapitre 1

Introduction

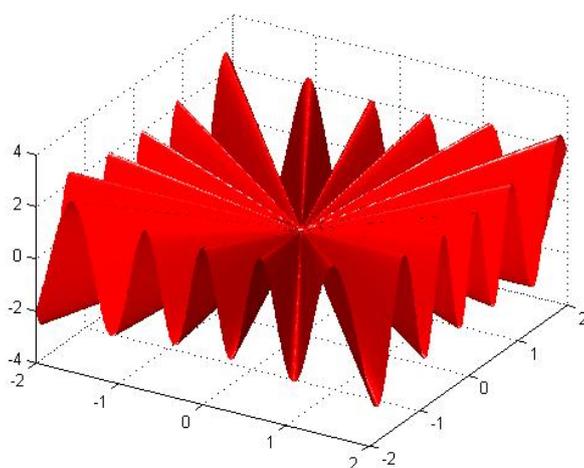


FIGURE 1.1: Graphe d'une fonction dépendante de deux variables

L'objectif de ce cours est d'introduire quelques notions de base en mathématique qui rentrent naturellement en jeu dans l'étude, la résolution ou l'interprétation mathématique de certains problèmes rencontrés dans les sciences économiques. Nous étudierons en particulier l'optimisation avec et sans contrainte des fonctions de plusieurs variables ce qui fera intervenir des connaissances fondamentales en calcul différentiel (dérivées partielles, développements limités, théorème des fonctions implicites...). Mais l'étude du comportement des fonctions de plusieurs variables sera facilitée par l'utilisation des notions dites d'algèbre linéaire. Des objets tels que les matrices ou les vecteurs seront très utiles pour énoncer et comprendre la partie sur l'optimisation mais aussi pour étudier d'autres problèmes comme par exemple les systèmes d'équations linéaires (qui interviennent notamment dans le modèle entrée-sortie introduit en économie par Leontief). Ainsi une large partie de ce cours sera consacrée aux notions d'algèbre linéaire. Certains chapitres montreront également l'importance des propriétés géométriques des courbes et des surfaces dans l'énoncé des résultats ou des formules. Il sera donc indispensable d'acquérir une certaine vision en géométrie plane et dans l'espace pour comprendre les interprétations d'un vecteur gradient, le rôle d'un plan tangent ou encore l'importance du Théorème des fonctions implicites dans l'étude d'un problème d'optimisation sous contrainte.

Cette unité d'enseignement fait suite à une unité de première année où les fonctions de plusieurs variables ont été introduites ainsi que certains résultats concernant l'optimisation des fonctions

de deux variables. Bien que ces aspects seront repris et généralisés dans ce cours, nous présentons ci-dessous quatre situations pour lesquelles on est amené à optimiser une fonction ou à résoudre un système d'équations linéaires. Ces problèmes sont entièrement résolubles en utilisant les notions vues en première année et ce cours développera en particulier des outils permettant de répondre à ce type de question dans un cadre plus général.

1.1 Un problème d'optimisation d'une fonction d'une variables

Une entreprise produit des disquettes au coût unitaire de 1 €. On estime que si chaque disquette se vend x €, alors $15 - x$ disquettes seront vendues. Comment fixer le prix de vente pour maximiser le profit de l'entrepreneur ?

On introduira la fonction qui à un prix de vente x associe le profit de l'entrepreneur et on cherchera à maximiser cette fonction.

1.2 Un problème d'optimisation d'une fonction de deux variables

Une entreprise fabrique un unique produit pour deux types de consommateurs. Pour les consommateurs de type 1, elle produit Q_1 unités de ce produit et fixe le prix de vente à $50 - 5Q_1$ dollars. Pour les consommateurs de type 2, elle produit Q_2 unités de ce produit et fixe le prix de vente à $100 - 10Q_2$ dollars. Le coût de production pour $Q = Q_1 + Q_2$ unités de ce produit est estimée à $90 + 20Q$ dollars. Comment choisir le couple (Q_1, Q_2) pour maximiser le profit de cette entreprise ?

1.3 Un problème d'optimisation sous contrainte égalité

Une entreprise produit une boisson qu'elle vend sous la forme de canettes cylindriques en métal de volume 33 cl chacune. Afin de minimiser le coût de ce métal, quel rayon et quelle hauteur doit-on donner à ce cylindre pour que sa surface soit la plus petite possible ?

On rappelle que le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est $\mathcal{V} = \pi R^2 h$ et que la surface extérieure est donnée par $\mathcal{A} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$ (aire latérale + aire des deux disques).

1.4 Un exemple de modèle entrée-sortie (ou modèle de Leontief)

On considère une économie simplifiée impliquant deux secteurs. Le secteur de l'énergie produit du gaz ou de l'essence et le secteur des métaux produit du fer, aluminium, ... On chiffre la production de chaque secteur à l'aide d'une certaine unité (ex : une unité = 1 m^3 d'un hydrocarbure donné). On estime que pour produire une unité, le secteur de l'énergie utilise 0.1 unité du secteur des métaux et 0.1 unité de sa propre production. Pour produire une unité, le secteur des métaux utilise 0.2 unité du secteur de l'énergie et 0.1 unité de sa propre production. Enfin ces deux secteurs doivent produire pour les consommateurs, 10 unités pour le secteur de l'énergie et 5 unités pour le secteur des métaux. Question : trouver le nombre d'unités que chaque secteur devra produire pour répondre à ces contraintes (*on écrira un système linéaire de deux équations à deux inconnues*) ?

Un ouvrage de référence pour ce cours, empruntable à la bibliothèque et contenant l'essentiel des notions abordées dans ce cours ainsi que des exemples issus de la théorie économique :

– **Blume & Simon**, *Mathématiques pour Économistes*. De Boeck université. 1998.

Chapitre 2

Les matrices

2.1 Les matrices : addition et multiplication

Definition 1 Soient n et p deux nombres entiers plus grands que 1. On appelle matrice de taille (n, p) (on dit aussi de type (n, p)), toute application

$$M : \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, p\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (i, j) \mapsto M(i, j)$$

On notera souvent le nombre réel $M(i, j)$ par m_{ij} .

Notations et cas particuliers

- On représentera toujours une matrice de taille (n, p) à l'aide d'un tableau de nombres à n lignes et p colonnes, de la façon suivante :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix}.$$

Dans ce tableau, le nombre m_{ij} est situé sur la i -ième ligne et la j -ième colonne et on dira que m_{ij} est le terme (i, j) de la matrice M .

- On pourra aussi noter de façon plus concise $M = [m_{ij}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$.
- L'ensemble de toutes les matrices de taille (n, p) sera noté $\mathcal{M}_{n,p}$.
- Dans le cas où $n = p$, on dira que M est une matrice carrée de taille n et on notera $\mathcal{M}_{n,p}$ simplement par \mathcal{M}_n .
- Lorsque $n = 1$, on dira que M est une matrice ligne. Lorsque $p = 1$, on parlera de matrice colonne.

Exemples

- $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5.2 & 2 & 4.7 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille $(2, 3)$.
- $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne, $N = (2.5 \quad 3 \quad 1)$ est une matrice ligne.

Lorsque deux matrices sont de même taille, on peut définir de façon assez naturelle leur somme de la façon suivante.

Definition 2 Soient $M = [m_{ij}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ et $N = [n_{ij}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ deux matrices de taille (n, p) , on définit la matrice somme, notée $M + N$, par

$$M + N = [m_{ij} + n_{ij}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}.$$

$M + N$ est donc encore une matrice de taille (n, p) .

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

On pourra remarquer que l'addition entre les matrices de même taille possède la propriété de commutativité ($M + N = N + M$) ainsi que la propriété d'associativité ($M + (N + P) = (M + N) + P$) comme l'addition classique entre nombres réels.

On définit ensuite une multiplication entre un nombre réel et une matrice quelconque.

Definition 3 Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}_{n,p}$, le produit de λ par M est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$ notée $\lambda \cdot M$ ou plus simplement λM et définie par

$$\lambda M = [\lambda m_{ij}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}.$$

Par exemple : $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}.$

On notera la propriété de distributivité de cette multiplication par rapport à l'addition :

$$\lambda(M + N) = \lambda M + \lambda N.$$

Le produit entre deux matrices est moins intuitif et plus difficile à énoncer, puisqu'il ne s'agit pas de multiplier terme à terme leurs éléments. Nous allons définir le produit de deux matrices lorsque le nombre de colonnes de la première coïncide avec le nombre de lignes de la deuxième. Nous verrons en TD pourquoi cette multiplication intervient de façon assez naturelle dans des problèmes.

Definition 4 Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $N \in \mathcal{M}_{p,r}$. Le produit P de la matrice M par la matrice N est une matrice de taille (n, r) et dont les termes sont définis par :

$$p_{ij} = m_{i1}n_{1j} + m_{i2}n_{2j} + \dots + m_{ip}n_{pj}, \quad (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket.$$

On notera $P = M \cdot N$ ou simplement $P = MN$.

Exemple Si $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on aura

$$MN = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer le terme (i, j) de la matrice produit, il suffit de considérer les nombres de la i -ième ligne de la matrice M et ceux de la j -ième colonne de N , d'effectuer ensuite les multiplications terme à terme et enfin d'ajouter les p nombres obtenus.

Il existe une notation pour éviter d'avoir recours aux points de suspension dans l'expression des

nombre p_{ij} de la Définition 4, lorsque qu'il n'y a pas de valeurs particulières attribuées aux types. C'est la notation " \sum "

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^p m_{ik} n_{kj}.$$

Dans le Définition 4, il est impératif de respecter la contrainte sur les tailles (nombre de colonnes de $M =$ nombre de lignes de N). On peut mémoriser ceci en écrivant une égalité symbolique entre les tailles des trois matrices P, M, N :

$$(n, r) = (n, p) \cdot (p, r).$$

Attention. Il se peut que le produit MN soit défini alors que le produit NM ne le soit pas. C'est notamment le cas si le nombre de colonne r de N n'est pas égal au nombre de lignes n de M . Mais même lorsque les deux produits sont bien définis, ils ne sont pas égaux en général. **Cette multiplication n'est pas commutative.** Par exemple, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1 (*associativité du produit matriciel*) Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}$, alors :

$$(AB)C = A(BC).$$

On pourra noter un de ces deux produits simplement par ABC . De plus si λ est un nombre réel, on a

$$(\lambda B)C = \lambda(BC) = B(\lambda C).$$

Le premier point de la proposition précédente exprime simplement qu'effectuer d'abord le produit $P = AB$ puis le produit PC donne la même matrice que de faire d'abord le produit $Q = BC$ et ensuite le produit AQ .

Preuve On ne montre que le premier point, le deuxième étant facile. En reprenant les notations ci-dessus, définissons $M = PC$ et $N = AQ$ qui sont deux éléments de $\mathcal{M}_{m,q}$. Si i et j vérifient $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq q$, on a

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^p p_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} \right) c_{kj}.$$

Par distributivité, on obtient :

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} c_{kj} \right).$$

De même, on trouve

$$n_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} \left(\sum_{k=1}^p b_{lk} c_{kj} \right) = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^p a_{il} b_{lk} c_{kj} \right).$$

On a bien l'égalité $m_{ij} = n_{ij}$ car on peut permuter les deux signes sommes (l'une ou l'autre des expressions revient en fait à sommer tous les nombres de la forme $a_{il} b_{lk} c_{kj}$). \square

Mentionnons enfin les propriétés de distributivité de la multiplication matricielle par rapport à l'addition. La proposition suivante se démontre sans difficulté.

Proposition 2 1. Si $B \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{p,q}$, alors

$$B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2.$$

2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $A \in \mathcal{M}_{p,q}$, alors

$$(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A.$$

2.2 Autres opérations sur les matrices, matrices particulières

Definition 5 On appelle transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}$, notée A^T et définie par

$$A^T(i, j) = A(j, i), \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Une matrice vérifiant $A^T = A$ (nécessairement carrée) est dite symétrique.

En d'autres termes, la matrice transposée est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A . Par exemple si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1.1 & 6.5 & 8 \end{pmatrix}$, on a $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1.1 \\ 2 & 6.5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Voici quelques propriétés de la transposée d'une matrice.

Proposition 3 1. On a toujours $(A^T)^T = A$.

2. Si A et B sont deux matrices de même taille, alors $(A + B)^T = A^T + B^T$.

3. Lorsque $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}$ alors $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

Preuve. On ne montre que le troisième point, les deux premiers sont évidents. Observons que $(AB)^T \in \mathcal{M}_{q,n}$. Si i et j vérifient $1 \leq i \leq q$ et $1 \leq j \leq n$, on a

$$(AB)^T(i, j) = AB(j, i) = \sum_{k=1}^p A(j, k)B(k, i) = \sum_{k=1}^n B^T(i, k)A^T(k, j) = (B^T \cdot A^T)(i, j),$$

ce qui montre bien l'égalité annoncée. \square

Definition 6 Si A est matrice carrée de taille (n, n) , on définit la trace de A par

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Les termes du type (i, i) , $1 \leq i \leq n$, sont appelés les éléments diagonaux de A et on dit que la trace est la somme des éléments diagonaux. On remarquera que la trace de la transposée d'une matrice est égale à la trace de cette matrice. Une propriété importante de la trace est la suivante.

Proposition 4 Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}$ alors

$$Tr(AB) = Tr(BA).$$

Preuve. On a $(AB)(i, i) = \sum_{j=1}^p A(i, j)B(j, i)$. En sommant sur i , on obtient

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p A(i, j)B(j, i) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n B(j, i)A(i, j) = \sum_{j=1}^p (BA)(j, j) = \text{Tr}(BA). \square$$

Lorsque A est une matrice carrée, on définit les **puissances successives** de A par récurrence :

$$A^1 = A, \quad A^{k+1} = A \cdot A^k = A^k \cdot A, \quad k \geq 2.$$

Il existe deux matrices particulières que l'on rencontrera souvent.

- La matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}$ est composée uniquement de 0. On vérifie immédiatement que l'addition d'une matrice A et la matrice nulle de même taille donne la matrice A et que la multiplication par une matrice nulle donne une autre matrice nulle. La matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}$ sera toujours notée $0_{n,p}$.
- La matrice identité de \mathcal{M}_n , notée I_n , est composée de 0 sauf sur la diagonale où ne figurent que des 1. Par exemple, si $n = 3$:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie assez facilement que si $A \in \mathcal{M}_{p,n}$ et $B \in \mathcal{M}_{n,q}$ alors

$$A \cdot I_n = A, \quad I_n \cdot B = B.$$

- Une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a tous ses termes non diagonaux nuls. Par exemple $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est dite triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure) si $A(i, j) = 0$ pour $i > j$ (resp. $i < j$). Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

Pour une matrice carrée, on peut parfois définir une autre matrice très utile appelée matrice inverse.

Definition 7 Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

On peut montrer que cette matrice B est unique et on la note A^{-1} .

Remarques.

1. L'unicité de la matrice B dans la définition précédente se vérifie facilement. Si C est une matrice vérifiant également les égalités $AC = CA = I_n$, on a en utilisant les propriétés de B :

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_n B = B,$$

ce qui justifie cette unicité.

2. La matrice inverse de A^{-1} est nécessairement A car $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Ainsi $(A^{-1})^{-1} = A$.

3. On peut en fait montrer que si une matrice $B \in \mathcal{M}_n$ vérifie $BA = I_n$, alors l'égalité $AB = I_n$ est aussi vérifiée (et donc B est l'inverse de A). Cette propriété est un peu plus délicate à justifier et sera admise. On retiendra que l'une des égalités $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ suffit à affirmer que A et B sont inverses l'une de l'autre.
4. Toutes les matrices carrées ne sont pas inversibles. Par exemple la matrice nulle ne l'est pas. On verra un critère permettant de vérifier si une matrice carrée est inversible lorsqu'on introduira le déterminant.

Formule de l'inverse d'une matrice de taille (2, 2). On pourra vérifier que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie $ad - bc \neq 0$, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Bien que nous n'utiliserons pas toutes ces formules dans la suite, mentionnons quelques propriétés impliquant inverse, transposée et puissance d'une matrice carrée. Ces propriétés sont faciles à prouver et on pourra le faire en exercice.

Proposition 5 Soient A et B deux matrices carrées de même taille et inversibles et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On a les propriétés suivantes.

1. Les produit AB et λA sont inversibles et on a

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

2. A^T est également inversible et on a l'égalité

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

3. Les puissances de A sont inversibles et leur inverse sont donnés par

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k.$$

2.3 Inversion de matrices. Systèmes d'équations linéaires. Pivot de Gauss

2.3.1 Inverser une matrice en utilisant la méthode du pivot de Gauss

Une méthode assez standard pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée A (lorsque bien sûr A est inversible) consiste à effectuer une succession d'opérations dites élémentaires soit sur les lignes de la matrice soit sur les colonnes de A . Nous nous restreindrons dans ce cours aux cas des opérations élémentaires sur les lignes. On appelle opération élémentaire sur les lignes de A , toute opération de l'un des types suivants.

- Multiplication de la ligne d'indice i de A par un nombre réel non nul λ (en abrégé $L_i \leftarrow \lambda L_i$).
- Permutation des lignes d'indices i et j de A (en abrégé $L_i \leftrightarrow L_j$).
- Addition à la ligne d'indice i de A du produit par un réel λ de la ligne d'indice $j \neq i$ (en abrégé $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$).

En fait, on peut parfaitement définir ce type d'opérations pour des matrices non carrées. On peut remarquer que chacune des opérations mentionnées correspond à la multiplication à gauche de A par une certaine matrice. Illustrons ceci en prenant l'exemple d'une matrice de taille $(3, 3)$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Le cas de l'opération $L_3 \leftarrow 2L_3$ donne le produit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot A.$$

De même l'inversion $L_1 \leftrightarrow L_3$, donne la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A.$$

Enfin, l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - a_{11} & a_{22} - a_{12} & a_{23} - a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A.$$

On peut donc associer une matrice à chacune des trois opérations élémentaires mentionnées ci-dessus. Revenons au cas d'une matrice carrée A quelconque. Supposons que nous avons pu effectuer k opérations élémentaires successives sur les lignes de A et que la matrice obtenue est l'identité I_n . Soient D_1, D_2, \dots, D_k les matrices associées à ces opérations élémentaires de sorte que les k produits successifs correspondants aux opérations élémentaires vérifient l'égalité

$$D_k D_{k-1} \cdots D_1 A = I_n.$$

Alors on peut directement conclure que $A^{-1} = D_k D_{k-1} \cdots D_1$. Pour éviter d'écrire à chaque étape les matrices D_i et de faire le calcul du produit final, on effectue simultanément les opérations élémentaires sur A et sur la matrice identité I_n . Les matrices obtenues à l'issue de ces k opérations seront $D_k D_{k-1} \cdots D_1 A$ d'un côté et $D_k D_{k-1} \cdots D_1 I_n = D_k D_{k-1} \cdots D_1$ de l'autre et on aura directement l'expression de l'inverse de A .

La méthode du pivot de Gauss est une technique qui permet de trouver les opérations D_k, \dots, D_1 en procédant pas à pas. Plutôt que d'essayer de décrire cette méthode dans un cadre général, nous

choisissons de la détailler sur un exemple. On prend l'exemple de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

qui est bien inversible (ce qui peut se montrer à l'aide du déterminant, notion que nous abordons plus tard). On écrit côte à côte la matrice A et la matrice I_3 .

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Premier objectif** : on se ramène à une matrice triangulaire supérieure pour la matrice de gauche, ce qui peut se faire à l'aide des deux opérations suivantes.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lors de la première opération, on s'est servi du nombre 2 de la première ligne de A pour annuler le coefficient de la troisième ligne. On dit que 2 a été utilisé comme pivot. De même, le nombre 1 situé sur la deuxième ligne et deuxième colonne a été utilisé pour pivot au cours de la deuxième opération.

- **Deuxième objectif** : on se ramène à une matrice diagonale en partant de la matrice de gauche. On commence d'abord par prendre pour pivot le nombre -2 en indice $(3, 3)$ de la matrice de gauche.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 0.5L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 1.5L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} -0.5 & 3 & 1.5 \\ -0.5 & 2 & 0.5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1.5 & -5 & -0.5 \\ -0.5 & 2 & 0.5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Troisième objectif** : on se ramène à I_3 en utilisant les opérations suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 0.5L_1 \\ L_3 \leftarrow -0.5L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0.75 & -2.5 & -0.25 \\ -0.5 & 2 & 0.5 \\ 0.5 & -1 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

D'après les explications qui ont précédé ces calculs, on en déduit :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.75 & -2.5 & -0.25 \\ -0.5 & 2 & 0.5 \\ 0.5 & -1 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Il est bien sûr possible de vérifier si le résultat est correct en effectuant le produit de la matrice obtenue avec la matrice A (on doit obtenir I_3).

On peut remarquer que les opérations d'inversion de lignes n'ont pas été utiles pour le calcul précédent. Elles peuvent l'être en revanche si un des coefficients candidat au rôle de pivot est nul.

Prenons l'exemple de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Pour se ramener à une matrice triangulaire

inférieure, on ne peut pas choisir cette fois-ci le terme $(1, 1)$ pour pivot. On peut alors procéder les calculs de la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que soit la forme de B , ce qui est bien plus que l'objectif de départ. Nous allons détailler une version du pivot de Gauss adaptée la résolution d'un système linéaire quel que soit le cas de figure : matrice A inversible ou pas, nombre d'équations n différent du nombre d'inconnues p . Cette version est intéressante même si la matrice A est inversible puisqu'elle demande moins de calculs. Détaillons-là d'abord dans le cas où la matrice A est inversible. Au lieu d'appliquer les opérations élémentaires simultanément sur les lignes de A et de I_n (comme pour le calcul de l'inverse), on les applique simultanément sur A et sur B . Dans ce cas, les opérations élémentaires, représentées par les matrices D_1, \dots, D_k , qui permettent de passer de A à I_n , permettront également de passer de B à $D_k \cdots D_1 B = A^{-1}B$. On obtiendra donc directement la solution du système. Prenons l'exemple du système linéaire

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 5 \\ x - 3y - z = -1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La résolution peut être menée ainsi :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 34 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 9L_3 - 7L_2 \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3/34 \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -13/34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} -47/34 \\ 225/34 \\ -13/34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2/9 \quad \begin{pmatrix} -47/34 \\ 25/34 \\ -13/34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \quad \begin{pmatrix} 14/17 \\ 25/34 \\ -13/34 \end{pmatrix}$$

L'unique solution de ce système est $(x, y, z) = \left(\frac{14}{17}, \frac{25}{34}, -\frac{13}{34}\right)$.

Lorsque la matrice A n'est pas inversible ou que $n \neq p$, il se peut que le système admette plusieurs solutions ou pas de solution du tout. La Proposition 6 garantit qu'il n'y a pas une

solution unique. Pour illustrer la méthode du pivot de Gauss lorsque $n \neq p$, nous considérerons le système $AX = B$ défini avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -6 & 5 & 3 \\ -3 & -4 & 9 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Le principe d'application du pivot de Gauss est le même, puisque on va essayer en premier lieu de "triangulariser" le système. Il s'agit de faire en sorte que pour toute ligne $i \geq 2$, l'indice j_i correspondant au premier terme non nul de cette ligne vérifie $j_i > j_{i-1}$. On mène les calculs de la façon suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La fin de la résolution est ici un peu différente du cas inversible. Observons tout d'abord que nous venons de transformer le système de départ $AX = B$ en un système équivalent (toutes les opérations effectuées sont réversibles) mais bien plus simple. Ce système s'écrit sous la forme $DX = C$ où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mais ce nouveau système s'écrit

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + t + u = -2 \\ -y + 3t - u = 5 \\ 3t = 9 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Notons que la dernière équation est vérifiée quelles que soient les valeurs de y, z, t, u et on peut la supprimer pour ne garder que les trois premières. On finit la résolution en "remontant" les équations. La troisième équation nous donne $t = 3$. On remarque ensuite que les deux premières équations ne suffiront pas à déterminer précisément les autres inconnues, puisque deux équations permettent d'exprimer au mieux deux inconnues. Une solution pour décrire l'ensemble des solutions de ce système consiste à attribuer des valeurs arbitraires λ et μ à z et u respectivement et d'exprimer x et y en fonction de ces valeurs. On obtient alors $y = 4 - \mu$ en utilisant la deuxième équation, puis $x = -13 + 3\lambda$ en reportant dans la première équation. Ainsi, le système admet une infinité de solutions et l'ensemble des solutions \mathcal{S} est donné par

$$\mathcal{S} = \{(-13 + 3\lambda, 4 - \mu, \lambda, 9, \mu) / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Remarques :

1. Dans l'exemple précédent celui-ci, on pouvait aussi arrêter la méthode du pivot dès que la matrice était triangulaire puis remonter les équations pour trouver les inconnues une par une.

2. Il est bien sûr possible qu'un système n'ait pas de solution. C'est le cas par exemple du système $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$. Pour ce système, l'absence de solution est claire. Remarquons que

l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ transforme ce système pour donner $\begin{cases} x + y = 1 \\ 0 \times x + 0 \times y = 1 \end{cases}$.

En général, lorsqu'un système n'a pas de solution, on tombe, lors de la résolution par le pivot, sur une équation sans solution du type

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = s,$$

où $s \neq 0$. C'est exactement le cas de figure qui se serait produit si le dernier coefficient de B avait été différent de 2 dans l'exemple du système de 4 équations et 5 inconnues traité ci-dessus. Lorsque il n'y a pas de solution, on dit alors que le système est incompatible.

3. Comme pour l'inversion de matrice, on peut aussi utiliser l'inversion de deux lignes s'il y a un problème pour utiliser un pivot, ce qui revient à permuter deux équations.

Chapitre 3

Points et vecteurs de \mathbb{R}^n

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons définir une structure particulière sur l'ensemble des n -uplets de nombres réels en leur attribuant le rôle de vecteurs ou de points. L'interprétation de ces vecteurs jouera un rôle fondamental lorsque nous étudierons le comportement d'une fonction de plusieurs variables au voisinage d'un point donné ou encore lorsque nous chercherons à décrire l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires dans le cas général.

Avant de passer au formalisme mathématique, prenons l'exemple de la situation suivante. Imaginons que $x = (x_1, \dots, x_n)$ soit un n -uplet de nombres réels représentant le stock restant de plusieurs matières premières. Lorsque $n = 1$, il n'y a qu'une matière première et on peut soit diminuer le stock soit l'augmenter. Dans le cas $n = 2$, les modifications possibles de ce stock pour passer d'un état $x = (x_1, x_2)$ à un état $y = (y_1, y_2)$ sont plus compliquées à décrire : on peut modifier x_1 et pas x_2 , modifier x_2 et pas x_1 , modifier x_1 et x_2 de la même façon, diminuer deux fois plus x_2 que x_1 . On peut décrire les variations indépendamment de l'état initial : par exemple, passer de $x = (2, 3)$ à $y = (1, 1)$ ou de $x = (3, 7)$ à $y = (2, 5)$ revient à diminuer la première composante de 1 et la deuxième de 2 et on peut résumer ces variations à l'aide du couple $h = (-1, -2)$. De plus l'addition composante par composante $y = x + h$ permet de décrire le passage de l'état x à l'état y . On voit sur cette situation qu'un couple de nombre réels peut représenter deux objets de nature différente : l'état du système et un déplacement entre deux états. De façon analogue, l'étude mathématique des couples de nombres réels fera intervenir deux notions : la notion de point et celle de vecteur.

3.2 Points et vecteurs de \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^n désigne l'ensemble des n -uplets de nombres réels $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. L'espace vectoriel \mathbb{R}^n désigne l'ensemble des n -uplets de nombres réels que l'on munit des deux opérations suivantes.

– L'addition de deux éléments h et k de \mathbb{R}^n est définie par

$$h + k = (h_1 + k_1, h_2 + k_2, \dots, h_n + k_n).$$

Cette opération vérifie les propriétés suivantes pour tous les éléments h, k, ℓ de \mathbb{R}^n et tout nombre réel λ :

1. $h + k = k + h$ (commutativité).
2. $h + (k + \ell) = (k + \ell) + h$ (associativité).
3. $h + 0 = 0 + h$ avec $0 = (0, 0, \dots, 0)$ qui est appelé élément neutre.

4. Tout élément h de \mathbb{R}^n possède un opposé, c'est à dire un élément k de \mathbb{R}^n tel que $h + k = 0$. Cet opposé est noté $-h$ et est égal à l'élément $(-h_1, -h_2, \dots, -h_n)$.
- La multiplication d'un vecteur h par un nombre réel λ est définie par

$$\lambda \cdot h = (\lambda h_1, \lambda h_2, \dots, \lambda h_n).$$

On notera souvent $\lambda \cdot h$ simplement par λh .

Si $(\lambda, \beta, h, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a les propriétés suivantes :

1. $\lambda \cdot (h + k) = \lambda \cdot h + \lambda \cdot k$.
2. $(\lambda + \beta) \cdot h = \lambda \cdot h + \beta \cdot h$.
3. $\lambda \cdot (\beta \cdot h) = (\lambda\beta) \cdot h$.
4. $1 \cdot h = h$.

Les éléments de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n sont appelés des vecteurs. Suivant les besoins, on utilisera aussi la représentation des vecteurs de \mathbb{R}^n à l'aide de matrices colonnes :

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

On définit également une autre structure sur \mathbb{R}^n : celle d'espace affine. Un élément x de l'espace affine \mathbb{R}^n est appelé un point. Ainsi un élément de \mathbb{R}^n peut être qualifié de point ou de vecteur suivant la structure à laquelle on fait allusion. Sur l'espace affine \mathbb{R}^n , on ne donne pas un sens à l'addition entre deux points (bien que l'addition des deux n -uplets pris en tant que vecteurs en ait un). En revanche, on fait "opérer" l'espace vectoriel \mathbb{R}^n sur l'espace affine \mathbb{R}^n : si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est un point de \mathbb{R}^n et si $h = (h_1, \dots, h_n)$ est un vecteur de \mathbb{R}^n , la somme $x + h$ désigne le point $y = (x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n)$ et on dira que y est le translaté de x par le vecteur h . Parfois on notera $h = \vec{xy}$. Notons que les deux additions que l'on vient de définir et qui sont notées de la même façon vérifient en outre

$$x + (h + k) = (x + h) + k,$$

pour tout point x et tous vecteurs h et k , ce qui signifie que le translaté du point x par le vecteur somme $h + k$ est aussi le point obtenu en utilisant d'abord la translation de vecteur h puis celle de vecteur k .

Représentation de \mathbb{R}^n pour $n = 1, 2, 3$.

- Lorsque $n = 1$, l'espace affine $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ est représenté à l'aide de la droite des réels. Sur cette droite, un réel x est représenté par un point. On peut également représenter les vecteurs à partir d'un point et de son translaté en dessinant une flèche. Par exemple, $h = 1.5$ permet de translater le point 0 pour obtenir le point 1.5 ou encore de translater le point 1 pour obtenir le point 1.5 :

$$1.5 = 0 + h, \quad 2.5 = 1 + h.$$

Le vecteur h peut être ainsi représenté par une flèche joignant tout point x au point $x + h$. Le cas $n = 1$ est présenté pour fixer les idées mais l'utilisation des vecteurs n'a pas d'intérêt ici : il n'y a qu'une seule "direction" pour translater les points.

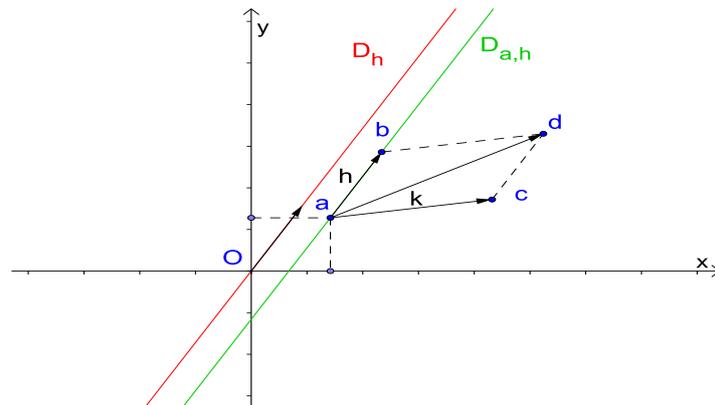
- Le cas de \mathbb{R}^2 devient plus intéressant puisque on a une infinité de "directions" pour se déplacer d'un point donné vers un autre point. On représente habituellement les couples de nombres réels dans le plan à l'aide de deux droites graduées perpendiculaires. Le point d'intersection de ces deux droites est assimilé au point $(0,0)$ et les points situés sur les deux droites graduées représentent les points $(x,0)$ ou $(0,y)$, $x,y \in \mathbb{R}$. Le point $a = (x,y)$ est représenté par le quatrième point du rectangle passant par $(0,0)$, $(0,y)$ et $(x,0)$. x est appelé abscisse du point a et y est appelé ordonnée du point a . Là aussi on représentera un vecteur h à l'aide d'une flèche joignant un point a à son translaté $b = a + h$. Ainsi, le translaté du point 0 par le vecteur h s'identifie au n -uplet h pris en tant que point. La somme $h + k$ de deux vecteurs est un vecteur que l'on peut représenter en adoptant la règle du parallélogramme. La droite vectorielle de vecteur directeur h est défini comme l'ensemble des vecteurs

$$D_h = \{\lambda h : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

La droite affine passant par le point a et de vecteur directeur h est définie par

$$\mathcal{D}_{a,h} = \{a + \lambda h : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Une droite affine s'interprète donc comme un point "+" une droite vectorielle.



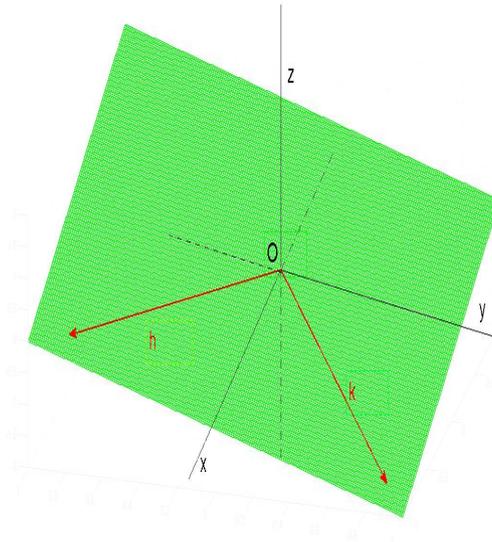
- Pour \mathbb{R}^3 , on utilise une représentation dans l'espace à l'aide de trois axes orthogonaux. Un point $a = (x,y,z)$ de \mathbb{R}^3 est repéré à l'aide de son abscisse x , son ordonnée y et sa hauteur z . On définit la droite vectorielle et affine comme dans \mathbb{R}^2 . Si h et k sont deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^3 tels que les droites D_h et D_k soient distinctes, le plan vectoriel engendré par les vecteurs h et k est défini par

$$P_{h,k} = \{\lambda h + \beta k : \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Le plan affine passant par le point a et dirigé par les vecteurs h et k est défini par

$$\mathcal{P}_{a,h,k} = \{a + \lambda h + \beta k : \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Un plan affine s'interprète donc comme un point "+" un plan vectoriel.



On définit de façon analogue les droites et les plans de \mathbb{R}^n lorsque $n \geq 4$.

On peut toujours décomposer un vecteur de \mathbb{R}^n à l'aide de n vecteurs bien particuliers qui constitue la base canonique.

Definition 8 Dans \mathbb{R}^n , le système de vecteurs $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ où si $1 \leq i \leq n$, \mathbf{e}_i est composé de zéros sauf la i -ième composante qui vaut 1 est appelé base canonique de \mathbb{R}^n . On a donc

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Si $h = (h_1, \dots, h_n)$ est un vecteur de \mathbb{R}^n , on a la décomposition

$$h = h_1 \mathbf{e}_1 + h_2 \mathbf{e}_2 + \dots + h_n \mathbf{e}_n,$$

et on dit que h_1, \dots, h_n sont les coordonnées de h dans la base canonique.

L'étude de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n ainsi que de certains sous-ensembles de vecteurs fera intervenir plus généralement la notion de combinaison linéaire.

Definition 9 On dit qu'un vecteur h de \mathbb{R}^n est combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, \dots, u_k si il existe des nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que :

$$h = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k.$$

Bien sûr on peut écrire un vecteur donné comme combinaison linéaire de tout un tas de vecteurs. Par exemple, dans \mathbb{R}^2 ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} &= 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= 1.5 \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par contre, on ne peut pas écrire $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On ne peut pas écrire non plus le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lien avec les systèmes linéaires. Si $AX = B$ est la représentation matricielle d'un système linéaire de n équations à p inconnues, utilisons la notation

$$A = [C_1, C_2, \dots, C_p],$$

où pour $1 \leq i \leq p$, C_i désigne la matrice colonne correspondante à la i -ième colonne de A . La multiplication de la matrice A et du vecteur X peut alors se réécrire

$$AX = X_1C_1 + X_2C_2 + \dots + X_pC_p.$$

On pourra vérifier cette égalité en commençant par le cas $n = p = 2$. Ainsi, l'équation matricielle du système linéaire signifie que le vecteur B de \mathbb{R}^n peut s'écrire comme une combinaison linéaire des p vecteurs de \mathbb{R}^n : C_1, \dots, C_p .

3.3 Sous-espaces vectoriels et sous-espaces affines de \mathbb{R}^n

Definition 10 *Un sous-ensemble V de \mathbb{R}^n est appelé un sous-espace vectoriel (en abrégé s.e.v) si*

- $\forall u, v \in V, \quad u + v \in \mathbb{R}^n.$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in V, \quad \lambda \cdot u \in V.$

Un sous-espace vectoriel V de \mathbb{R}^n est donc un sous-ensemble de vecteurs stable par addition et par multiplication par un réel. Remarquons qu'en prenant $\lambda = 0$ dans la définition, on a nécessairement $0 \in V$. Remarquons aussi qu'avec cette définition $V = \mathbb{R}^n$ ou $V = \{0\}$ sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n .

Introduisons maintenant deux sous-espaces vectoriels (on pourra vérifier la définition précédente) qui sont associés à une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}$.

Definition 11 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$.*

1. *Le noyau de A noté $\text{Ker}(A)$ est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p défini par*

$$\text{Ker}(A) = \{h \in \mathbb{R}^p : Ah = 0\}.$$

2. *L'image de A notée $\text{Im}(A)$ est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n défini par*

$$\text{Im}(A) = \{Ah : h \in \mathbb{R}^p\}.$$

Remarquons que le système linéaire d'équation $AX = B$ admet une solution si et seulement si le vecteur B appartient à $\text{Im}(A)$.

Definition 12 Si u_1, \dots, u_k sont des vecteurs de \mathbb{R}^n alors le sous-ensemble de vecteurs

$$V = \{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel appelé sous-espace vectoriel engendré par u_1, \dots, u_k .

Le sous-espace engendré par k vecteurs est donc l'ensemble des combinaisons linéaires obtenues à l'aide de ces vecteurs. On verra au paragraphe suivant qu'un sous espace vectoriel est toujours engendré par un nombre fini de vecteurs.

Notation. Le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1, \dots, u_k se note $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$.

Exercice. Les ensembles suivants sont-ils des s.e.v de \mathbb{R}^n ? Si oui, par quels vecteurs sont-ils engendrés?

$$F = \{h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 : 3h_1 - 4h_2 = 0\},$$

$$G = \{h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 : h_1^2 = h_2^2\}.$$

Definition 13 On dit que \mathcal{V} est un sous espace affine de \mathbb{R}^n si il existe un point a de \mathbb{R}^n et un sous espace vectoriel V tels que

$$\mathcal{V} = \{a + h : h \in V\}.$$

Lorsque V est engendré par un seul vecteur h non nul, on a $V = \{\lambda h : \lambda \in \mathbb{R}\}$ et \mathcal{V} est appelé droite affine de \mathbb{R}^n .

Remarquons que \mathcal{V} s'identifie à V lorsque $a = 0$. La différence est que \mathcal{V} est vu comme un ensemble de points alors que V est vu comme un ensemble de vecteurs (la direction de \mathcal{V}).

Exemple. A la fin du Chapitre 2, nous avons étudié un système linéaire de 4 équations à 5 inconnues. Pour ce système, l'ensemble \mathcal{S} des solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \{(-13 + 3\lambda, 4 - \mu, \lambda, 9, \mu) : (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Remarquons que tout élément X de \mathcal{S} s'écrit

$$X = (-13, 4, 0, 9, 0) + \lambda(3, 0, 1, 0, 0) + \mu(0, -1, 0, 0, 1).$$

On voit donc que l'ensemble des points de \mathcal{S} est un sous-espace affine passant par le point $a = (-13, 4, 0, 9, 0)$ et dirigé par le sous espace vectoriel $V = \text{Vect}(u, v)$ où $u = (3, 0, 1, 0, 0)$ et $v = (0, -1, 0, 0, 1)$.

Plus généralement, nous avons le résultat suivant.

Proposition 7 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathbb{R}^n$. Pour un système d'équations linéaires $AX = B$ admettant au moins une solution, l'ensemble des points de \mathbb{R}^p solutions est un sous-espace affine dirigé par le sous-espace vectoriel $\ker(A)$.

Preuve. Soit X_0 une solution du système linéaire. Il est facile de vérifier que $X \in \mathbb{R}^p$ est solution du système si et seulement si le vecteur $X - X_0$ appartient à $\ker(A)$. En effet, on a $AX = AX_0 = B \Leftrightarrow A(X - X_0) = 0$. Ainsi toute solution X s'écrit sous la forme $X_0 + u$ où $u \in \ker(A)$, ce qui prouve le résultat. \square

3.4 Systèmes libres. Systèmes générateurs. Base.

Definition 14 On dit que les vecteurs u_1, \dots, u_k de \mathbb{R}^n forment un système (ou famille) libre si l'égalité

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k = 0$$

ne peut être réalisée qu'avec des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tous nuls.

Remarques

1. Si un des vecteurs est nul, la famille $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ n'est pas libre. De même si deux des vecteurs sont égaux, alors le système de vecteurs n'est pas libre.
2. Si le système $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ n'est pas libre, on dit qu'il est lié. Dire que ce système est lié signifie qu'un des vecteurs du système s'écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs. En effet, dire que le système est lié signifie que l'égalité de la définition précédente peut être réalisée avec au moins un coefficient λ_j non nul. En d'autres termes, un des vecteurs u_j est une combinaison linéaire des autres vecteurs :

$$u_j = \sum_{i \neq j} \frac{-\lambda_i}{\lambda_j} u_i.$$

Ainsi si $k = 2$, dire que le système $\{u_1, u_2\}$ est lié signifie que soit $u_1 = \alpha u_2$ soit $u_2 = \beta u_1$ pour un certain réel α ou β . On a les deux égalités à la fois si u_1 et u_2 ne sont pas nuls (avec dans ce cas $\beta = \frac{1}{\alpha}$). Deux vecteurs formant un système lié sont dits colinéaires.

3. Lorsque le système $\{u_1, \dots, u_k\}$ est libre, on dit parfois que les vecteurs sont linéairement indépendants.

Exemples

- Dans \mathbb{R}^2 , $u_1 = (1, -1)$ et $u_2 = (2, -2)$ ne sont pas linéairement indépendants car $u_2 = 2u_1$ ou encore $u_2 - 2u_1 = 0$.
- Le système $\{u_1 = (1, -1), u_2 = (1, 1)\}$ est libre dans \mathbb{R}^2 . Pour le vérifier, on cherche le couple de réels (λ_1, λ_2) tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$. Ceci revient à montrer que le système linéaire

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

admet le couple $(0, 0)$ pour seule solution. On peut aussi utiliser le fait que les deux vecteurs sont non nuls et qu'il n'existe pas de réel t tel que $(1, -1) = t(1, 1)$.

- Dans \mathbb{R}^3 , les vecteurs $w_1 = (1, 2, 3)$, $w_2 = (4, 5, 6)$ et $w_3 = (7, 8, 9)$ ne sont pas linéairement indépendants. En effet, on peut vérifier que $w_1 - 2w_2 + w_3 = 0$.

Méthode. Dans l'exemple précédent, comment trouver facilement la relation $w_1 - 2w_2 + w_3 = 0$ liant ces trois vecteurs ?

Il est facile de voir qu'un triplet de nombres réels $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ satisfaisant la relation $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0$ est solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le système serait libre si et seulement si $(0, 0, 0)$ était la seule solution. Pour vérifier qu'il existe bien une autre solution (par exemple $(1, -1, 1)$), on pourra utiliser la méthode du pivot de Gauss (exercice).

Proposition 8 *Le système de vecteurs de \mathbb{R}^n formé par u_1, \dots, u_k est libre si et seulement si le système linéaire $AX = 0$ admet pour seule solution $X = 0$, la matrice A étant la matrice de $\mathcal{M}_{n,k}$ dont la j -ième colonne est composée des coordonnées du vecteur u_j dans la base canonique si $1 \leq j \leq k$.*

Definition 15 *Soit V un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et u_1, \dots, u_k des vecteurs de V . On dit que le système de vecteurs $\{u_1, \dots, u_k\}$, est un système générateur (ou une famille génératrice) de V si V est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de ce système :*

$$V = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}.$$

De façon équivalente, le système $\{u_1, \dots, u_k\}$ est un système générateur de V si et seulement si V correspond au sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1, \dots, u_k , soit

$$V = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k).$$

Exemples

- Dans \mathbb{R}^3 , $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est un système générateur de \mathbb{R}^3 . C'est de plus un système libre.
- Dans \mathbb{R}^2 , $\{(1, -1)\}$ est un système générateur de $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$.

Proposition 9 *Le système $\{u_1, \dots, u_k\}$ est un système générateur de V si et seulement si pour tout $B \in V$, le système $AX = B$ possède une solution. La matrice A est définie comme dans la Proposition 8.*

Par exemple, on pourra montrer que le système $\{(1, -1), (1, 1)\}$ génère \mathbb{R}^2 .

Remarque. Un système générateur mais lié contient des vecteurs inutiles pour décrire le sous-espace vectoriel engendré. En effet, certains vecteurs s'écrivent comme combinaison linéaire d'autres vecteurs et peuvent être supprimés (on peut faire des "économies" pour décrire toutes les combinaisons linéaires). Par exemple si

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, -1, 1), \quad v_3 = (2, 0, 2)$$

et $V = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$, on a $v_3 = v_1 + v_2$ et on peut écrire plus simplement $V = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

Definition 16 *Soit V un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . On dit que le système de vecteurs $S = \{u_1, \dots, u_k\}$ est une base de V si c'est un système à la fois libre et générateur de V .*

On peut aussi formuler la définition précédente de la façon suivante : le système S est une base de V si et seulement si tout élément de V s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de S avec unicité des coefficients réalisant la combinaison linéaire (car deux combinaisons linéaires égales entraînent une combinaison linéaire nulle pour les vecteurs considérés). En terme de système linéaire d'équations, cette définition signifie que le système $AX = B$ admet une unique solution X et ce pour tout $B \in V$ (A est encore la matrice de la Proposition 8).

Il est clair que \mathbb{R}^n possède au moins une base (la base canonique) mais il y en a d'autres. Par exemple on pourra vérifier que le système $\{(1, 1), (1, -1)\}$ est une base de \mathbb{R}^2 . Le théorème suivant donne les résultats fondamentaux vérifiés par les bases d'un s.e.v de \mathbb{R}^n . Nous admettrons ce théorème.

Théorème 1 *Soit V un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .*

1. De toute famille génératrice de V , on peut extraire une base de V . On peut également compléter une famille libre de V en une base de V . En particulier, V possède des bases.
2. Toutes les bases de V possèdent le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la dimension de V et est noté $\dim(V)$. En particulier $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
3. Si W est un s.e.v contenant V (i.e $V \subset W$) alors $\dim(V) \leq \dim(W)$.

Remarques

- Il est facile de montrer que le troisième point est une conséquence des deux premiers (on peut compléter une base de V afin d'obtenir une base de W).
- Ce théorème entraîne la propriété fondamentale suivante : n vecteurs libres de \mathbb{R}^n forment nécessairement une base (sinon on pourrait compléter ce système libre en une base d'après le point 1., base qui aurait plus de n éléments).

3.5 Rang d'un système de vecteurs. Rang d'une matrice.

Definition 17 Le rang d'un système de vecteurs $\{v_1, \dots, v_k\}$ est la dimension de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$. Le rang est donc le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants de ce système. On le note $\text{rg}(v_1, \dots, v_k)$.

Remarque. Les vecteurs v_1, \dots, v_k forment un système libre si et seulement si le rang de ce système est k (on dit que le rang du système est maximal).

Méthode. On peut utiliser la méthode du pivot de Gauss pour déterminer le rang d'un système de vecteurs. Si le rang n'est pas maximal, on peut obtenir des relations entre ces vecteurs. On commence par écrire les vecteurs en ligne. La règle de base est la suivante : les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice vues au Chapitre 1 ne changent pas le rang du système. Autrement dit, toute opération sur les lignes transforme un système de vecteurs en un système de même rang. Traitons un exemple.

Dans \mathbb{R}^5 , considérons le système de vecteurs $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ défini par

$$\begin{aligned} u_1 &= (2, 3 - 3, 4, 2) \\ u_2 &= (3, 6, -2, 5, 9) \\ u_3 &= (7, 18, -2, 7, 7) \\ u_4 &= (2, 4, -2, 3, 1). \end{aligned}$$

On effectue ensuite des opérations sur les lignes sans qu'il soit réellement utile de former une matrice. Tout d'abord, choisissons 2 pour pivot et formons les vecteurs

$$\begin{aligned} v_1 = u_1 &= (2, 3 - 3, 4, 2) \\ v_2 = 2u_2 - 3u_1 &= (0, 3, 5, -2, 12) \\ v_3 = 2u_3 - 7u_1 &= (0, 15, 17, -14, 0) \\ v_4 = u_4 - u_1 &= (0, 1, 1, -1, -1). \end{aligned}$$

Servons-nous maintenant de 3 comme pivot pour former les vecteurs

$$\begin{aligned} w_1 = v_1 &= (2, 3 - 3, 4, 2) \\ w_2 = v_2 &= (0, 3, 5, -2, 12) \\ w_3 = 5v_2 - v_3 &= (0, 0, 8, 4, 60) \\ w_4 = v_2 - 3v_4 &= (0, 0, 2, 1, 15). \end{aligned}$$

Remarquons que $w_4 = \frac{1}{4}w_3$. On a de plus $\text{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \text{rg}(w_1, w_2, w_3, w_4)$. On peut facilement vérifier que le système $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre (à cause de la triangularisation effectuée) et on en déduit que

$$\text{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \text{rg}(w_1, w_2, w_3, w_4) = \text{rg}(w_1, w_2, w_3) = 3.$$

Ainsi le sous-espace vectoriel V engendré par u_1, u_2, u_3, u_4 est de dimension 3 et le système $\{w_1, w_2, w_3\}$ en est une base. Déterminons une liaison entre les vecteurs de départ. La relation $w_4 = \frac{1}{4}w_3$ entraîne la relation

$$v_2 - v_3 + 12v_4 = 0.,$$

ce qui nous donne ensuite

$$4u_1 - u_2 + u_3 - 6u_4 = 0.$$

On peut aussi remarquer que le système de vecteurs $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre (car les étapes de la méthode du pivot de Gauss montrent que $\text{rg}(u_1, u_2, u_3) = \text{rg}(w_1, w_2, w_3) = 3$). Le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ est donc également une base de V et on a

$$u_4 = \frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{6}u_2 + \frac{1}{6}u_3.$$

On passe maintenant à la définition du rang d'une matrice.

Definition 18 *Le rang d'une matrice A de type (n, p) est égal au rang du système formé par ses vecteurs colonnes. On le note $\text{rg}(A)$. On a donc $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$.*

Il n'y a pas lieu de distinguer le rang du système formé par les vecteurs colonnes de A de celui du système formé par les vecteurs lignes de A . Sans rentrer dans des détails un peu techniques pour justifier cette affirmation, donnons en l'intuition en utilisant la méthode du pivot de Gauss sur les vecteurs lignes. La méthode du pivot de Gauss permet en multipliant A par une matrice inversible D à droite de se ramener une matrice du type

$$DA = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

où le premier terme non nul de la ligne $i + 1$ possède un indice de colonne plus grand que celui de la ligne i (ce terme valant 1) sauf pour les dernières lignes qui sont éventuellement nulles. On peut alors observer que le nombre de 1 que l'on arrivera à écrire de la sorte sera à la fois le rang des colonnes ou des lignes de la matrice DA . Or le rang des lignes de la matrice A est égal à celui des lignes de la matrice DA (car on utilise le pivot de Gauss pour passer de l'une à l'autre). Mais on peut facilement montrer en utilisant l'inversibilité de D que le rang des colonnes de la matrice DA est aussi celui des colonnes de A .

Deux conséquences immédiates de cette observation sont données par la proposition suivante.

Proposition 10 *Le rang d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}$ est également le rang du système formé par ses vecteurs lignes. On en déduit l'égalité $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$ ainsi que l'inégalité*

$$\text{rg}(A) \leq \min\{n, p\}.$$

Mentionnons un résultat reliant l'inversibilité d'une matrice à son noyau, son image et son rang.

Proposition 11 Soit $A \in \mathcal{M}_n$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. La matrice A est inversible.
2. $\ker(A) = \{0\}$.
3. $\text{rg}(A) = n$.
4. $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.

Preuve. Montrons d'abord que 1. entraîne 2. Supposons A inversible. Alors le système $AX = 0$ admet pour seule solution $X = 0$. Donc $\ker(A) = \{0\}$.

L'implication 2. \Rightarrow 3. est claire car dire que $\ker(A) = \{0\}$ signifie que les vecteurs colonnes de la matrice A forment un système libre donc un système de rang n .

Comme un système de n vecteurs libres de \mathbb{R}^n forment une base de \mathbb{R}^n et que $\text{Im}(A)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires formées à partir des colonnes de A , on a forcément 3. \Rightarrow 4..

Montrons enfin l'implication 4. \Rightarrow 1. Comme les vecteurs colonnes de A forment un système libre de n vecteurs de \mathbb{R}^n (donc une base), alors pour tout élément \mathbf{e}_i de la base canonique de \mathbb{R}^n , il existe un vecteur B_i de \mathbb{R}^n tel que $AB_i = \mathbf{e}_i$. La matrice B dont les colonnes sont B_1, \dots, B_n satisfait alors $AB = I_n$, ce qui montre que A est inversible. \square

Lien avec les bases de \mathbb{R}^n . D'après la proposition précédente, on déduit que n vecteurs de \mathbb{R}^n forment une base si et seulement si la matrice A dont les colonnes sont formées à l'aide de ces vecteurs est inversible. En effet, nous avons déjà mentionné que n vecteurs forment une base de \mathbb{R}^n si et seulement si ce système est libre ou autrement dit s'il est de rang n .

Remarque. On est maintenant en mesure de prouver le sens réciproque de l'équivalence donnée dans la Proposition 6 du Chapitre 2. Supposons que le système linéaire $AX = B$ admette une unique solution pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ et un vecteur $B \in \mathbb{R}^n$. Alors en utilisant la Proposition 7, on peut affirmer que $\ker(A) = \{0\}$. En utilisant la Proposition 11, on conclut que A est inversible.

Terminons enfin un résultat très utile qui garantit sous certaines conditions l'inversibilité de la matrice $I - A$ dans le modèle de Leontief lorsque A représente la matrice de technologie (cf. dernier exemple du Chapitre 1 et TD).

Proposition 12 Si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1$ pour tout i , alors $I - A$ est une matrice inversible. On a le même résultat lorsque $\sum_{i=1}^n |a_{ij}| < 1$ pour tout j .

Preuve. On prouve uniquement le résultat lorsque $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1$ pour tout i car l'autre cas s'en déduit en utilisant qu'une matrice est inversible si et seulement si sa transposée l'est et le fait que ${}^t(I - A) = I - {}^tA$. Pour prouver que $I - A$ est inversible, il suffit d'après la proposition précédente de montrer que le rang de $I - A$ est égal à n ou encore que 0 est l'unique solution de l'équation $(I - A)X = 0$. Soit X un vecteur de \mathbb{R}^n tel que $(I - A)X = 0$. Ceci signifie en particulier que

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}X_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Considérons un indice i_0 tel que $|X_{i_0}| = \max\{|X_j| : 1 \leq j \leq n\}$. On a alors

$$\begin{aligned} |X_{i_0}| &= \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0j} X_j \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0j}| \cdot |X_j| \\ &\leq |X_{i_0}| \sum_{j=1}^n |a_{i_0j}| \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse, on en déduit que $|X_{i_0}| = 0$, ce qui prouve que $X = 0$ et donc que $I - A$ est inversible. \square

3.6 Hyperplans de \mathbb{R}^n

Definition 19 On appelle hyperplan vectoriel de \mathbb{R}^n , tout sous-espace vectoriel V défini par

$$V = \left\{ h \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n u_j h_j = 0 \right\},$$

où u désigne un vecteur non nul de \mathbb{R}^n .

On parle plutôt de droite pour $n = 2$, de plan pour $n = 3$. On peut observer qu'un hyperplan de \mathbb{R}^n est toujours de dimension $n - 1$. En effet, supposons sans perte de généralité que u_1 est différent de 0. Dans ce cas, tout élément h de V peut s'écrire

$$h = \left(\sum_{j=2}^n \frac{-u_j}{u_1} h_j, h_2, \dots, h_n \right),$$

ou encore

$$h = h_2 \cdot \left(\frac{-u_2}{u_1}, 1, 0, \dots, 0 \right) + h_3 \cdot \left(\frac{-u_3}{u_1}, 0, 1, 0, \dots, 0 \right) + \dots + h_n \cdot \left(\frac{-u_n}{u_1}, 0, \dots, 0, 1 \right).$$

Pour $i \geq 2$, soit v_i le vecteur de \mathbb{R}^n dont les composantes valent 0 sauf la première composante qui vaut $\frac{-u_i}{u_1}$ et la i -ième qui vaut 1. On a alors

$$V = \text{Vect}(v_2, \dots, v_n).$$

Comme le système $\{v_2, \dots, v_n\}$ est libre, la dimension de V est bien $n - 1$.

En rajoutant un point a de \mathbb{R}^n à un hyperplan vectoriel V , on définit un hyperplan affine :

$$\mathcal{V} = \{a + h : h \in V\}.$$

Un point x de \mathbb{R}^n appartient à \mathcal{V} si et seulement si le vecteur $a\vec{x} = x - a$ appartient à V . Si V est défini à partir d'un vecteur u , on a

$$x \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n u_j (x_j - a_j) = 0.$$

On dit que alors que les vecteurs u et $x - a$ sont orthogonaux (pour deux vecteurs u et v de \mathbb{R}^n , le nombre réel $\sum_{j=1}^n u_j v_j$ se note $(u|v)$ et est appelé produit scalaire de u et de v ; on y reviendra au chapitre suivant). On dit aussi que u est un vecteur normal de l'hyperplan \mathcal{V} .

Remarques.

- Remarquons que le point a permettant de décrire \mathcal{V} à partir de V n'est pas unique. Pour tout $b \in \mathcal{V}$, on peut vérifier que

$$\mathcal{V} = \{b + k : k \in V\}.$$

- En revanche si b désigne un point de \mathbb{R}^n n'appartenant pas à \mathcal{V} , alors l'hyperplan affine

$$\mathcal{V}' = \{b + h : h \in V\}$$

ne peut avoir de point commun avec \mathcal{V} (on dit alors que \mathcal{V} et \mathcal{V}' sont parallèles).

- Si $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n u_i x_i = b\}$ pour un vecteur u non nul donné et $b \in \mathbb{R}$, alors \mathcal{V} est un hyperplan affine. Si $a \in \mathcal{V}$, on a $\sum_{i=1}^n u_i a_i = b$ et on peut aussi écrire

$$\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n u_i (x_i - a_i) = 0\}.$$

Remarque sur les solutions d'un système linéaire. On a déjà vu que l'ensemble des solutions d'un système linéaire d'équations $AX = B$ était un sous-espace affine. Ce sous-espace affine correspond également aux points d'intersection de n hyperplans affines de \mathbb{R}^p (si $A \in \mathcal{M}_{n,p}$). Par exemple, lorsque $n = p = 3$, l'ensemble des solutions du système correspond à l'intersection de 3 plans de \mathbb{R}^3 .

3.7 Applications linéaires

Definition 20 Une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dite linéaire si

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad f(x + y) = f(x) + f(y),$
- $\forall (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$

Exemples.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \alpha x.$
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x_1 + x_2.$
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x_1 - x_2, x_1 + x_2).$

Une fonction linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p peut toujours s'écrire à l'aide d'une multiplication matricielle, lorsque qu'on convient de représenter les éléments de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p à l'aide de matrices colonnes.

Proposition 13 Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une application linéaire, alors il existe une matrice A de taille (p, n) telle que $f(x) = Ax$.

Preuve : Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^n et $x \in \mathbb{R}^n$, on a $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. En itérant les propriétés de linéarité de f , on obtient $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$. Si A désigne la matrice dont la j -ème colonne est formée par le vecteur $f(e_j)$, cette dernière égalité s'écrit $f(x) = Ax$. \square

Retour sur les exemples précédents. Le deuxième exemple donne

$$f(x) = 2x_1 + x_2 = (2, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Le troisième exemple donne

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

3.8 Formes quadratiques

Definition 21 Une application $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée forme quadratique s'il existe une matrice symétrique $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ telle que

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Si on convient d'écrire les éléments de \mathbb{R}^n par des matrices colonnes, on peut écrire également $q(x) = x^T A x$.

Exemple. $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow 2x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2$ est une forme quadratique. Sa matrice représentative est donnée par $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Chapitre 4

Fonctions de plusieurs variables. Calcul différentiel

4.1 Quelques rappels sur les fonctions d'une variable

4.1.1 Dérivée d'une fonction

Definition 22 Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. f est dite dérivable en un point $a \in I$ si la fonction

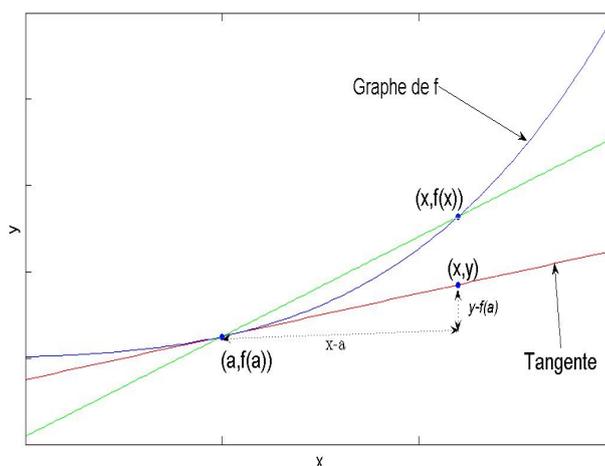
$$g_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite en a . Si elle existe, cette limite est appelée le nombre dérivée de f au point a et est notée $f'(a)$.

2. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I . La fonction

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

est appelée fonction dérivée de f .



La courbe représentative (ou graphe) de f est définie par $\mathcal{C}_f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$.
Si $a \in I$, $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point

$(a, f(a))$. L'équation de la droite tangente au point $(a, f(a))$ est donnée par :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Nous rappelons également la notion de développement limité d'une fonction à l'ordre 1 et 2.

Proposition 14 – Si f est dérivable en $a \in I$, alors il existe une fonction ε , définie au voisinage de 0, vérifiant $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ et telle que

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h),$$

pour tout h tel que $a + h \in I$.

– Si f est deux fois dérivable en $a \in I$, alors il existe une fonction ε , définie au voisinage de 0, vérifiant $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ et telle que

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + h^2\varepsilon(h),$$

pour tout h tel que $a + h \in I$.

Remarques

- Le développement limité à l'ordre 1 s'interprète de la manière suivante : au voisinage du point a , on peut approcher f avec la fonction affine $h \mapsto f(a) + hf'(a)$. D'un point de vue géométrique, on approxime un point du graphe de f (le point $(a + h, f(a + h))$) par un point de sa tangente au point a (le point $(a + h, f(a) + hf'(a))$).
- Le développement limité à l'ordre 2 est plus précis lorsque la fonction est deux fois dérivable : au voisinage du point a , on peut approcher f avec la fonction parabolique $h \mapsto f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a)$. D'un point de vue géométrique, on approxime un point du graphe de f par un point d'une parabole.
- En posant $x = a + h$, on peut aussi écrire à l'ordre 1 :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x - a)$$

et de même à l'ordre 2.

Ces deux développements limités permettent de prouver la proposition suivante.

Proposition 15 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en un point a appartenant à l'intérieur de I .

1. Si a est un extremum local pour f (minimum local ou maximum local), alors $f'(a) = 0$.
2. Si f est deux fois dérivable au point a avec $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$) alors a est un minimum local (resp. maximum local) pour f .

Remarques

- Rappelons que la conclusion du premier point n'a pas lieu si a n'est pas un point intérieur à I . Par exemple, la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$ admet 0 pour minimum global et 1 pour maximum global sans que la dérivée s'annule en ces points.
- Pour le deuxième point, on ne peut conclure lorsque $f'(a) = f''(a) = 0$: il se peut que a ne soit ni un minimum ni un maximum local comme le montre l'exemple de la fonction $f : x \rightarrow x^3$ pour $a = 0$. Mais il n'est pas impossible d'avoir un extremum local, comme le montre l'exemple de la fonction $f : x \rightarrow x^4$ pour $a = 0$.

4.1.2 Taux de croissance instantané, élasticité

Definition 23 Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et ne s'annule pas, le taux de croissance instantané de f est la fonction $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $r(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$.

Remarque : Lorsque $f(t) > 0$, $r(t)$ est la dérivée de $\ln(f)$ au point t .

Definition 24 Si f est dérivable et ne s'annule pas, l'élasticité de f est la fonction ϵ définie par $\epsilon(x) = \frac{f'(x)x}{f(x)}$.

On a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(f(x)) - \ln(f(x_0))}{\ln(x) - \ln(x_0)} = \epsilon(x_0)$. Il s'agit donc de l'accroissement infinitésimal de $\ln(f)$ par rapport à la variable $\ln(x)$. On peut aussi rapprocher l'élasticité de la quantité $\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)} / \frac{x-x_0}{x_0}$. Ainsi en économie, si f représente la demande et x le prix, l'élasticité s'interprète comme le quotient entre le pourcentage de variation de la demande et le pourcentage de variation du prix. Cette expression a donc l'avantage de ne pas dépendre des unités choisies (contrairement au taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$).

4.2 Topologie de \mathbb{R}^n . Continuité d'une fonction de plusieurs variables

Dans \mathbb{R}^n , il est indispensable de pouvoir mesurer une distance entre deux points. La distance la plus classique est basée sur la norme euclidienne : si h est un vecteur de \mathbb{R}^n , la norme euclidienne de h est définie par

$$\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}.$$

La distance entre deux points x et y de \mathbb{R}^n est définie par $\|x - y\|$, c'est à dire par la norme du vecteur $x - y$. On définit alors des boules ouvertes de centre et de rayon donné : la boule ouverte de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$ est définie par

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}.$$

Si $n = 2$, on parle plutôt de disque.

La norme euclidienne est associée à la notion d'orthogonalité grâce au produit scalaire. Le produit scalaire de deux vecteurs h et k de \mathbb{R}^n est défini par

$$(h|k) = \sum_{i=1}^n h_i k_i.$$

On pourra remarquer les égalités $(h|h) = \|h\|^2$ et $(h|k) = (k|h)$. De plus pour tous vecteurs h, k , les applications $u \mapsto (u|k)$ et $v \mapsto (h|v)$ sont linéaires.

On dira que deux vecteurs h et k de \mathbb{R}^n sont orthogonaux si $(h|k) = 0$. Dans ce cas, en écrivant l'égalité $\|h + k\|^2 = (h + k|h + k)$ et en utilisant les propriétés de linéarité évoquées ci-dessus, on peut vérifier l'égalité

$$\|h + k\|^2 = \|h\|^2 + \|k\|^2$$

(on parle du théorème de Pythagore).

On dira qu'une suite de point $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^n converge vers un point x si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$; on dira alors que la suite de points est convergente et que x est la limite de cette suite. Il en fait équivalent de dire que chaque coordonnée de x_n converge vers la coordonnée correspondante de

x .

Une fonction f de plusieurs variables ne sera pas toujours définie sur \mathbb{R}^n tout entier mais sur un sous-ensemble de \mathbb{R}^n : par exemple la fonction $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2-1}$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus C$ où C désigne le cercle unité de \mathbb{R}^2 . Des parties qui jouent un rôle important dans l'étude des fonctions de plusieurs variables sont les parties ouvertes et fermés.

Definition 25 On dit qu'un sous-ensemble \mathcal{O} de \mathbb{R}^n est un ouvert si pour tout $x \in \mathcal{O}$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \mathcal{O}$.

On dit qu'un sous-ensemble F de \mathbb{R}^n est un fermé si la limite d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente de points de F est encore un point de F .

On peut montrer qu'un ensemble est ouvert si et seulement si son complémentaire dans \mathbb{R}^n est fermé.

De façon imagée, un ensemble est ouvert si pour tout point x de cet ensemble, on reste encore dans cet ensemble lorsqu'on s'écarte un peu de x . Par exemple, une boule ouverte est ouverte. Un pavé de la forme

$$]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \cdots \times]a_n, b_n[$$

est un ouvert de \mathbb{R}^n . Par contre si on ferme tous les intervalles du pavé précédente, on obtient un fermé. Les ensembles du type

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r\},$$

où $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$ sont des fermés de \mathbb{R}^n (on parle d'ailleurs de boules fermées). Dans \mathbb{R}^2 , le cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon $r > 0$,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$$

est un fermé.

Definition 26 On dit que sous-ensemble K de \mathbb{R}^n est borné si on peut trouver $r > 0$ tel que $\|x\| < r$ pour tout x dans K (ce qui revient à dire que l'on peut inclure F dans une boule de centre 0).

On dit qu'un sous-ensemble K de \mathbb{R}^n est un compact si K est à la fois fermé et borné.

Par exemple, toute boule fermée de \mathbb{R}^n est compacte. Dans \mathbb{R}^2 , un cercle ou un pavé de la forme $K = [a, b] \times [c, d]$ est un compact.

Donnons maintenant la définition d'une fonction continue.

Definition 27 Soit $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n . On dit que $y \in \mathbb{R}$ est la limite de f au point x_0 et on note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ si pour toute suite $(x_n)_n$ de points de \mathcal{O} telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$.

On dit que f est continue en $x_0 \in \mathcal{O}$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

On dit que f est continue si f est continue en tout point de \mathcal{O} .

Par exemple la fonction $(x, y) \mapsto \exp(x^2 + y^2)$ est continue sur \mathbb{R}^2 . En revanche la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 et qui vaut 1 lorsque $x, y \in [0, 1]$ et 0 sinon n'est pas continue : par exemple, en 0, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(-1/n, 0) = 0 \neq f(0, 0) = 1.$$

Comme dans le cas $n = 1$, on peut montrer que la notion de continuité est stable par les opérations usuelles : une somme, un produit, une composition de fonctions continues ou l'inverse

d'une fonction continue ne s'annulant pas est encore une fonction continue.

Nous admettrons le résultat suivant qui est fondamental car il garantit la présence d'extrema pour f sous certaines conditions.

Théorème 2 *Soit f une fonction continue définie sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n et à valeurs réelles. Si K est un compact de \mathbb{R}^n , inclus dans \mathcal{O} , alors f atteint son minimum et son maximum sur K , c'est à dire qu'il existe a et b dans K tels que*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \quad x \in K.$$

Lorsque $n = 1$, le théorème précédent entraîne qu'une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ atteint toujours sa valeur minimale et sa valeur maximale sur un intervalle fermé borné $I = [\alpha, \beta]$. Une telle propriété est bien sûr fautive si I est un intervalle ouvert. Lorsque $n = 2$, une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ atteint toujours sa valeur minimale et sa valeur maximale sur tout pavé du type $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ et également sur tout disque fermé, tout cercle...

On définit également une fonction $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^p$ sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n en se donnant p fonctions $f_1, \dots, f_p : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ et en posant $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ pour tout $x \in \mathcal{O}$. Lorsqu'elle existe, la limite de f lorsque x tend vers x_0 est définie par

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x), \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} f_p(x) \right),$$

et on dira que f est continue si les applications coordonnées f_1, \dots, f_p le sont. Ainsi toutes les applications linéaires $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont continues. Les formes quadratiques, définies au chapitre précédent sont également des fonctions continues.

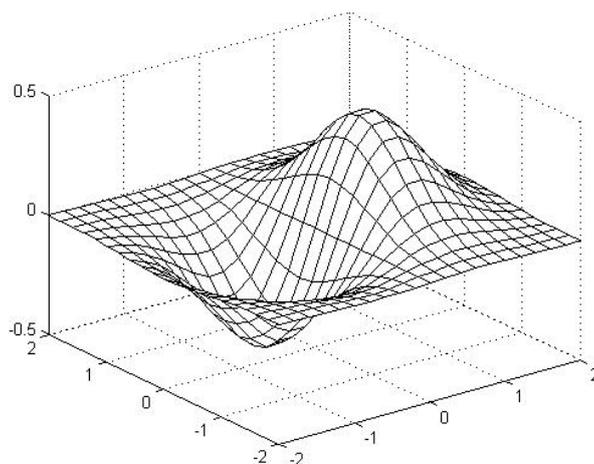


FIGURE 4.1: Graphe de $(x, y) \mapsto x \exp(-x^2 - y^2)$

4.3 Dérivation des fonctions de plusieurs variables

4.3.1 Fonction de deux variables et à valeurs réelles

Definition 28 *Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Sous réserve qu'elles existent, les dérivées partielles de f sont les deux fonctions notées $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ et définies par*

$$\partial_1 f(a, b) = \lim_{x \xrightarrow{\neq} a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a},$$

$$\partial_2 f(a, b) = \lim_{y \xrightarrow{\neq} b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}.$$

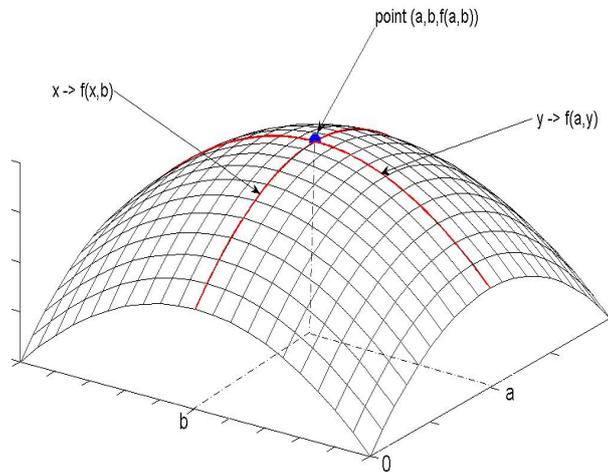
En d'autres termes $\partial_1 f(a, b)$, $\partial_2 f(a, b)$ sont les nombres dérivées des applications partielles $x \mapsto f(x, b)$ et $y \mapsto f(a, y)$ au point a et b respectivement.

On note parfois $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ au lieu de $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$.

Remarque. Contrairement au cas de la dimension 1, lorsque $n = 2$, l'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité de l'application. Par exemple, la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(0, y) = f(x, 0) = 1$ et par $f(x, y) = 0$ si x et y sont tous les deux différents de 0 vérifie $\partial_1 f(0, 0) = \partial_2 f(0, 0) = 0$ mais f n'est pas continue car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(-1/n, -1/n) = 0 \neq f(0, 0) = 1.$$

Les dérivées partielles en un point ne donnent des informations que sur les applications partielles.



4.3.2 Fonction de n variables et à valeurs réelles

Si maintenant $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n , les dérivées partielles de f sont notées $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ et sont définies par

$$\partial_i f(a_1, \dots, a_n) = \lim_{x_i \xrightarrow{\neq} a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{x_i - a_i}$$

(sous réserve d'existence).

La notion de différentielle et de vecteur gradient sera importante pour la suite.

Definition 29 Si f admet des dérivées partielles au point $a \in \mathbb{R}^n$, la différentielle de f au point a est l'application linéaire notée $Df(a)$ et définie sur \mathbb{R}^n par

$$Df(a)(h) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) h_i.$$

On notera souvent simplement $Df(a)h$ l'image de h par cette application. Le vecteur gradient de f au point a est le vecteur de \mathbb{R}^n noté et défini par

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a) \quad \cdots \quad \partial_n f(a))^T.$$

En d'autres termes, le vecteur gradient est le vecteur des dérivées partielles. Remarquons les égalités

$$Df(a)h = \nabla f(a)^T \times h = (\nabla f(a)|h),$$

en prenant la convention d'écrire les vecteurs de \mathbb{R}^n à l'aide de matrices colonnes. Remarquons que lorsque $n = 1$, on a simplement $Df(a)h = f'(a)h$.

4.3.3 Les fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p

On considère maintenant une fonction $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Il existe p fonctions $f_1, \dots, f_p : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

La différentielle $Df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de f au point a est définie par

$$Df(a)h = (Df_1(a)h, \dots, Df_p(a)h).$$

En prenant la convention des matrices colonnes pour les vecteurs de \mathbb{R}^n on a

$$Df(a)h = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 f_p(a) & \cdots & \partial_n f_p(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on identifiera l'application linéaire $Df(a)$ avec sa matrice représentative de taille (p, n) (matrice des dérivées partielles).

Lorsque $n = 1$, on a simplement $f'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_p(a))$ (vecteur des dérivées des applications coordonnées).

4.3.4 Développement limité à l'ordre 1

Les fonctions qui seront étudiées dans ce cours vérifieront en général toutes les hypothèses de régularité demandées dans les différents théorèmes. Toutefois, par souci de généralité, nous écrirons sans réellement nous y attarder des conditions précises sur la régularité des fonctions pour lesquelles les théorèmes s'appliquent. Voici une notion qui interviendra fréquemment dans les énoncés.

Definition 30 Soit $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n . On dira que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{O} si toutes les dérivées partielles de f existent et sont des fonctions continues sur \mathcal{O} .

Remarque Même dans le cas $n = p = 1$, il se peut qu'une fonction soit dérivable en tout point mais que sa dérivée ne soit pas continue. Par exemple on peut montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ est dérivable sur \mathbb{R} mais que sa dérivée n'est pas continue en 0.

Proposition 16 (*Développement limité à l'ordre 1*)

Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Alors si $a \in \mathcal{O}$, on a

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \|h\| \varepsilon(h),$$

où

$$\varepsilon : \{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : a+h \in \mathcal{O}\} \rightarrow \mathbb{R}^p$$

vérifie $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

On parle aussi de formule de Taylor à l'ordre 1.

Nous admettrons ce résultat. Comme pour le cas $n = p = 1$, il signifie que si h est proche de 0, $h \rightarrow f(a+h) - f(a)$ s'approche par l'application linéaire $h \rightarrow Df(a)h$. Bien sur, on sait que ces deux fonctions ont pour limite 0 en 0. Mais le développement limité garantit que

$$\lim_{h \neq 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Df(a)h}{\|h\|} = 0,$$

c'est à dire que la différence des deux fonctions tend plus vite vers 0 que le facteur $\|h\|$.

Exemple. Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{C}^1 , on peut écrire

$$f(a+k, b+l) = f(a, b) + k\partial_1 f(a, b) + l\partial_2 f(a, b) + \sqrt{k^2 + l^2} \varepsilon(k, l).$$

Vérifions ce développement limité lorsque $f(a, b) = (a+b)^2$. On a $\partial_1 f(a, b) = \partial_2 f(a, b) = 2(a+b)$ et

$$f(a+k, b+l) - f(a, b) - k\partial_1 f(a, b) - l\partial_2 f(a, b) = (k+l)^2.$$

Posons $\varepsilon(k, l) = \frac{(k+l)^2}{\sqrt{k^2+l^2}}$. On a

$$\varepsilon(k, l) \leq \frac{2k^2 + 2l^2}{\sqrt{k^2 + l^2}} = 2\sqrt{k^2 + l^2}$$

et donc $\lim_{(k,l) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(k, l) = 0$, ce qui prouve bien la formule de Taylor sur cet exemple.

4.3.5 Différentielle d'une composée de fonctions

Si \mathcal{O} et $\tilde{\mathcal{O}}$ sont des ouverts de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p respectivement et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}^q$ sont deux fonctions telles que $f(\mathcal{O}) \subset \tilde{\mathcal{O}}$ alors l'application composée de f et g , notée $g \circ f$, est l'application définie sur \mathcal{O} par

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad x \in \mathcal{O}.$$

Concernant la dérivation d'une composée de fonctions, nous avons le résultat suivant.

Proposition 17 *On suppose f et g toutes les deux \mathcal{C}^1 . Alors les dérivées partielles de $g \circ f$ sont bien définies.*

- Supposons $p = q = 1$. Alors pour $1 \leq i \leq n$:

$$\partial_i(g \circ f)(a) = g'(f(a)) \times \partial_i f(a).$$

- Supposons $q = 1$ et p, n quelconques. Alors pour $1 \leq i \leq n$:

$$\partial_i(g \circ f)(a) = \sum_{j=1}^p \partial_j g(f(a)) \times \partial_i f_j(a).$$

- Dans le cas général, on a pour $1 \leq k \leq q$, $(g \circ f)_k = g_k \circ f$. Ainsi

$$\partial_i(g \circ f)_k(a) = \sum_{j=1}^n \partial_j g_k(f(a)) \times \partial_i f_j(a).$$

En terme de différentielles représentées sous forme matricielle, on a donc :

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \times Df(a).$$

Idée de la démonstration. On peut traiter directement le cas général, en utilisant le produit matriciel. Le développement limité de f au point a s'écrit :

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \|h\| \varepsilon_1(h),$$

où ε_1 vérifie les propriétés données dans la Proposition 16. En notant $b = f(a)$ et

$$\phi(h) = Df(a)h + \|h\| \varepsilon_1(h),$$

on a $f(a+h) = b + \phi(h)$ et le développement limité de g au point b s'écrit :

$$g(b + \phi(h)) = g(b) + Dg(b) \cdot \phi(h) + \|\phi(h)\| \varepsilon_2(\phi(h)).$$

Cette dernière égalité s'écrit également

$$g \circ f(a+h) = g \circ f(a) + Dg(b) \cdot Df(a) \cdot h + \|h\| Dg(b) \cdot \varepsilon_1(h) + \|\phi(h)\| \varepsilon_2(\phi(h)).$$

Il suffit alors de montrer que les deux derniers termes du membre de droite tendent vers 0 après division par $\|h\|$ ce que nous admettrons. On voit bien que la partie linéaire est bien le produit des deux matrices annoncées.

Calculons ce produit lorsque $n = p = 2$ et $q = 1$:

$$D(g \circ f)(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 g(b) & \partial_2 g(b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) \end{pmatrix},$$

ce qui donne les deux formules

$$\begin{aligned} \partial_1(g \circ f)(a) &= \partial_1 g(f(a)) \times \partial_1 f_1(a) + \partial_2 g(f(a)) \times \partial_1 f_2(a), \\ \partial_2(g \circ f)(a) &= \partial_1 g(f(a)) \times \partial_2 f_1(a) + \partial_2 g(f(a)) \times \partial_2 f_2(a) \end{aligned}$$

4.3.6 Productivités marginales, élasticités partielles et fonctions homogènes

En économie, les dérivées partielles d'une fonction de production $Q = F(K, L)$ qui dépend de deux facteurs (e.g K la quantité de capital utilisée et L la quantité de travail) s'interprètent à l'aide des productivités marginales. Supposons que les facteurs (K^*, L^*) sont utilisés. Si le stock de capital augmente de ΔK , alors d'après le développement limité à l'ordre 1, on a

$$\Delta Q \approx \partial_1 F(K^*, L^*).$$

Le nombre $\partial_1 F(K^*, L^*)$ s'interprète comme la variation en production due à une augmentation d'une unité de capital (attention ce n'est qu'une approximation). On dit que c'est la productivité marginale du capital. De même, $\partial_2 F(K^*, L^*)$ est la productivité marginale du travail.

Les fonctions dites homogènes se rencontrent fréquemment en économie.

Definition 31 On dit que $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ est homogène de degré k si pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, \dots, x_n).$$

Par exemple f définie par $f(x, y) = 30x^{1/2}y^{3/2} - 2x^3y^{-1}$ est homogène. En revanche f définie par $f(x, y) = x^3 + 3x^2$ ne l'est pas.

Remarque Soit f une fonction de production homogène de degré 1. Si on double (triple,...) les quantités x_1, \dots, x_n alors on double (triple,...) le niveau de production.

Le théorème suivant, appelé le théorème d'Euler, donne une relation entre les dérivées partielles d'une fonction homogène f et ses dérivées partielles.

Théorème 3 Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 et homogène de degré k alors :

$$x_1 \partial_1 f(x) + \dots + x_n \partial_n f(x) = kf(x).$$

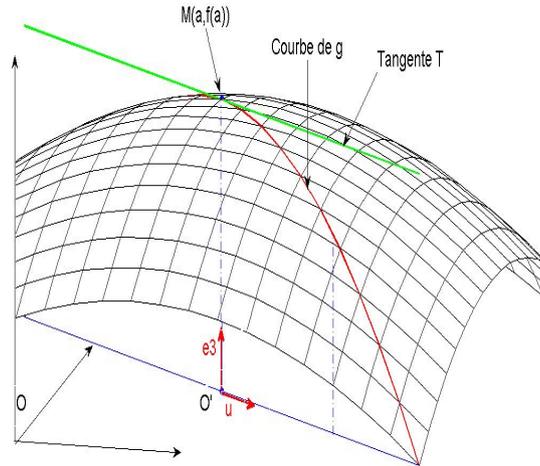
Ce théorème sera prouvé en TD.

Remarques

- Si f est homogène de degré k , il est facile de prouver que les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $k - 1$.
- Les élasticités partielles de f au point x sont les quantités

$$\frac{x_1 \partial_1 f(x)}{f(x)}, \dots, \frac{x_n \partial_n f(x)}{f(x)}.$$

Ainsi pour une fonction homogène, le théorème d'Euler garantit que la somme des élasticités est égal au degré d'homogénéité k .



4.4 Surfaces. Plan tangent. Théorème des fonctions implicites

4.4.1 Plan tangent au graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Considérons le cas $n = 2$ avec une fonction f dépendante de deux variables et de classe \mathcal{C}^1 sur son ensemble de définition. Si $a = (a_1, a_2)$ est un point du domaine de définition de f , le graphe de f peut être vu comme une réunion de courbes représentatives de fonctions d'une variable s'intersectant toutes au point $M = (a_1, a_2, f(a_1, a_2))$. Pour définir une telle courbe, on se donne une direction représentée par un vecteur $u = (h, k, 0)$. On définit alors la fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle de \mathbb{R} contenant 0 par

$$g(t) = f(a_1 + th, a_2 + tk).$$

Posons $O' = (a_1, a_2, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. La courbe représentative de g est incluse dans le plan affine \mathcal{P} qui passe par O' et qui est dirigé par les vecteurs u et e_3 . Dans le plan \mathcal{P} , on peut utiliser le repère $(O'; u, e_3)$ pour repérer les points puisque un point M_0 de \mathcal{P} s'écrit sous la forme $O' + tu + ze_3$ où t et z sont des nombres réels. La fonction g étant une fonction d'une variable, on sait définir l'équation de la droite tangente T à \mathcal{C}_g en $t = 0$ puisque un point de \mathcal{C}_g est de la forme

$$(a_1 + th, a_2 + tk, g(t)) = O' + tu + g(t)e_3,$$

où t est un nombre réel. Dans le plan \mathcal{P} , un point $M_0 = O' + tu + ze_3$ appartient à T si et seulement si

$$z = g(0) + tg'(0).$$

Or d'après le théorème de dérivation des fonctions composées, on a

$$g'(0) = h\partial_1 f(a) + k\partial_2 f(a).$$

L'équation de T est donc :

$$z - f(a) = th\partial_1 f(a) + tk\partial_2 f(a).$$

Les coordonnées (x, y, z) de M_0 dans la base canonique vérifiant $x = a_1 + th$ et $y = a_2 + tk$, on obtient la relation

$$z - f(a) = (x - a_1)\partial_1 f(a) + (y - a_2)\partial_2 f(a).$$

L'ensemble des points (x, y, z) tels que l'égalité précédente soit vérifiée est un plan que l'on appelle plan tangent au graphe de f au point a .

On peut généraliser cette approche à tout $n \geq 2$ ce qui donne lieu à la définition suivante.

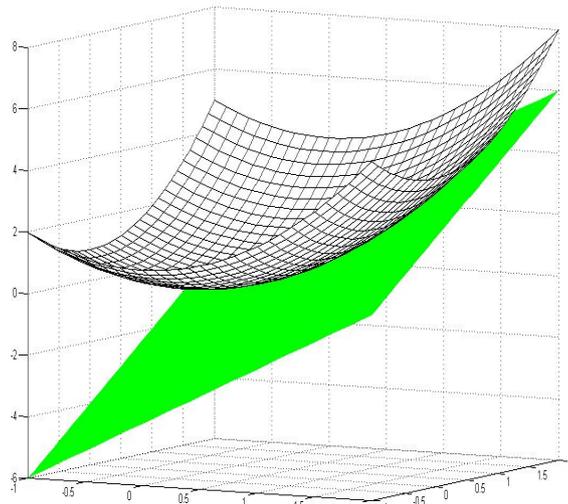
Definition 32 Si $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction \mathcal{C}^1 sur un ouvert de \mathbb{R}^n , on appelle hyperplan tangent au graphe de f au point $a \in \mathcal{O}$ l'hyperplan de \mathbb{R}^{n+1} d'équation :

$$x_{n+1} - a_{n+1} = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \partial_i f(a).$$

Remarque. Lorsque qu'on fait un développement limité à l'ordre 1

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) h_i + \|h\| \varepsilon(h) \\ &= f(a) + (\nabla f(a)|h) + \|h\| \varepsilon(h) \end{aligned}$$

On approche $f(a+h)$ par $\kappa = f(a) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) h_i$. Géométriquement, cette approximation revient à approcher le point $M = (a+h, f(a+h))$ de \mathbb{R}^{n+1} par le point $M_0 = (a+h, \kappa)$ situé sur l'hyperplan tangent.



Exemple. Si $f(x, y) = x^2 + y^2$ (cf. figure ci-dessus), l'équation du plan tangent au point $(1, 1)$ est :

$$z = 2x + 2y - 2.$$

Première interprétation du vecteur gradient Si on cherche le vecteur h vérifiant $\|h\| = 1$ tel que $f(a+h) - f(a)$ soit maximal (ou minimal), on peut répondre approximativement en maximisant sur h , la quantité $(\nabla f(a)|h)$. On peut alors utiliser le lemme suivant :

Lemme 1 Si u et v sont deux vecteurs de \mathbb{R}^n , le produit scalaire entre ces deux vecteurs vérifie l'inégalité

$$|(u|v)| \leq \|u\| \|v\|$$

et l'égalité est obtenue uniquement si u et v sont colinéaires (i.e $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$).

Ainsi si $\nabla f(a) \neq 0$, la quantité $(\nabla f(a)|h)$ est maximale (resp. minimale) pour le vecteur de norme 1 donné par $h = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$ (resp. $h = -\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$). En économie, si $Q = F(K, L)$ est une fonction de production, on peut être amené à modifier les facteurs K et L de sorte de Q augmente le plus. D'après ce qui précède, la direction de la plus grande augmentation/diminution est donné par le vecteur gradient $\nabla F(K, L)$.

4.4.2 Hypersurfaces de \mathbb{R}^n

Definition 33 Soit n un entier naturel non nul et $g : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^1 définie sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^{n+1} . On suppose que pour tout $x \in \mathcal{O}$, $\nabla g(x) \neq 0$. Si l'ensemble

$$S = \{x \in \mathcal{O} : g(x) = 0\}$$

est non vide, on dit que S est une hypersurface de \mathbb{R}^{n+1} .

Lorsque $n = 1$, on parle plutôt de courbe et lorsque $n = 2$, de surface.

Exemples

- Le cercle unité de \mathbb{R}^2

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

est une courbe de \mathbb{R}^2 . La définition de courbe est vérifiée en prenant $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

car $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

- Si $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $g(x, y) = x^2 - y^2$, la définition n'est pas satisfaisante car $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$. Il faut exclure le point $(0, 0)$ pour que la définition soit respectée.
- Lorsque $g(x) = x_{n+1} - f(x_1, \dots, x_n)$ avec f de classe \mathcal{C}^1 , la définition est toujours vérifiée et S correspond au graphe de la fonction f .
- En économie les ensembles de niveau des fonctions de production ou des fonctions d'utilité sont des exemples d'hypersurfaces : elles ont des équations de la forme $Q(x) = k$ où Q est une fonction de $n + 1$ variables et k est un réel représentant le niveau de production ou de satisfaction (la fonction g de la Définition 33 est alors définie par $g(x) = Q(x) - k$).

Definition 34 Conservons les notations de la définition précédente. On appelle hyperplan tangent à S au point $a \in \mathcal{O}$ l'hyperplan affine de \mathbb{R}^{n+1} dont l'équation est

$$\sum_{i=1}^{n+1} (x_i - a_i) \partial_i g(a) = 0.$$

Nous verrons au paragraphe suivant pourquoi cette équation apparaît naturellement en utilisant le théorème des fonctions implicites. On peut remarquer que pour une surface définie comme le graphe d'une fonction, on retrouve bien la formule de la Définition 32.

Dans le cas général, notons que si x est un point de l'hyperplan \mathcal{P} tangent à S en a alors le vecteur $\nabla g(a)$ est orthogonal au vecteur $x - a$ (qui appartient l'hyperplan vectoriel P qui dirige \mathcal{P}). En effet l'équation du plan tangent s'écrit aussi $(x - a | \nabla g(a)) = 0$. **Le vecteur gradient est donc orthogonal à l'hyperplan (vectoriel) tangent.** Par exemple, lorsque $n = 1$, le vecteur gradient au point a est le vecteur directeur de la droite passant par le point a et orthogonale à la droite tangente au point a (cf Figure 4.2).

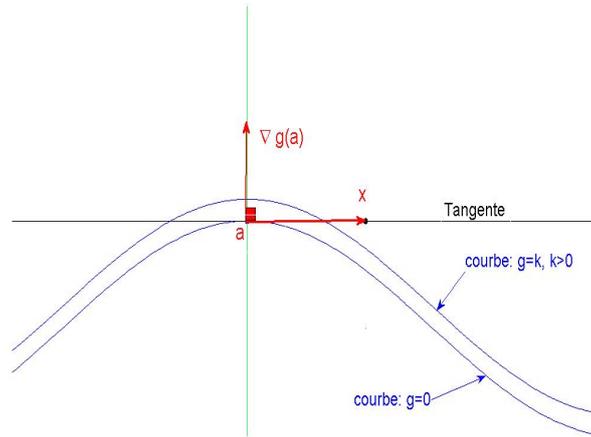


FIGURE 4.2:

On peut également connaître le sens du vecteur gradient : il pointe toujours vers des ensembles de niveau du type $g(z) = k$ avec $k > 0$. En effet si $a \in \mathcal{S}$, en posant $h = \nabla g(a)$, le développement limité de $f : t \mapsto g(a + th)$ en 0 s'écrit

$$f(t) = f(0) + t \|h\|^2 + t\varepsilon(t)$$

Si $t > 0$ est assez petit, on obtient

$$f(t) - f(0) = g(a + th) - g(a) = g(a + th) > 0,$$

ce qui montre bien que $g(z) > 0$ lorsque $z - a$ a même direction et même sens que $\nabla g(a)$ et z est proche de a .

On a vu que le graphe d'une fonction régulière était une hypersurface. Le contraire n'est évidem-

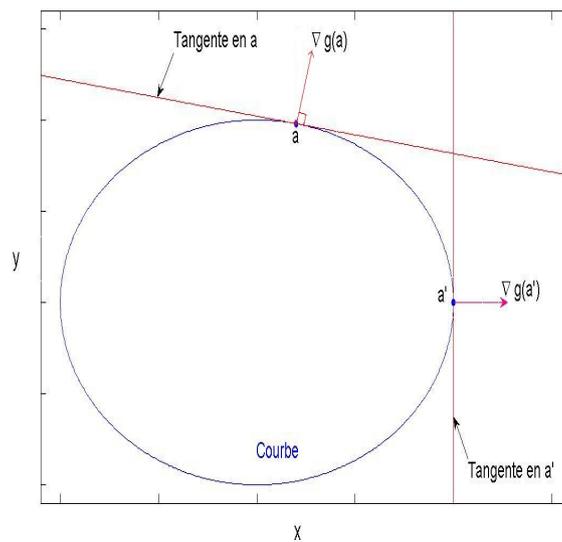


FIGURE 4.3:

ment pas vrai, en considérant l'exemple d'un cercle de \mathbb{R}^2 (cf Figure 4.3). Pour espérer qu'une courbe donnée de \mathbb{R}^2 soit la courbe représentative d'une fonction, il faudrait trouver une fonction ϕ telle que tout point (x, y) de cette courbe vérifie l'égalité $y = \phi(x)$. Mais on peut aussi parler de courbe représentative si on peut trouver une fonction ψ telle que tout point (x, y) de la courbe vérifie l'égalité $x = \psi(y)$ (ce qui revient à échanger les deux coordonnées). Or pour un cercle, il n'est pas possible d'exprimer y en fonction de x (car plusieurs valeurs de x peuvent correspondre à une valeur de y) ou x en fonction de y (car plusieurs valeurs de x peuvent correspondre à une valeur de y). Tout ceci peut aussi se vérifier en reprenant l'équation d'un cercle : $x^2 + y^2 = 1$. En revanche, on peut espérer qu'au voisinage d'un point de la courbe il soit possible d'exprimer l'ordonnée y d'un point de la courbe en fonction de son abscisse x , sinon x en fonction de y (ou peut-être les deux). Sur la figure 4.3, on voit qu'un morceau de courbe autour du point a peut être le graphe d'une fonction $x \rightarrow \phi(x)$ ou d'une fonction $y \rightarrow \psi(y)$ (tourner la figure à 90°). En revanche, autour du point a' on ne pourrait exprimer y en fonction de x (on trouve toujours deux points ayant la même abscisse) ; mais on pourrait exprimer x en fonction de y . Au niveau du point a' , on constate que le gradient $\nabla g(a')$ a une ordonnée nulle (ce qui signifie également que la tangente au point a' est verticale) . Géométriquement il semble que si $\partial_2 g(z) \neq 0$, on évite que la courbe rebrousse chemin comme au point a' et il semble possible d'exprimer y en fonction de x autour du point z . Le théorème des fonctions implicites donne des conditions précises pour pouvoir exprimer localement une coordonnée en fonction de l'autre pour une courbe donnée de \mathbb{R}^2 .

4.4.3 Le théorème des fonctions implicites

Théorème 4 Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^2 et $g : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 dont la gradient est non nul en tout point. considérons la courbe

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathcal{O} : g(x, y) = 0\},$$

et (a, b) un point de \mathcal{C} .

1. Si $\partial_2 g(a, b) \neq 0$ alors il existe un pavé $] \alpha, \beta[\times] \gamma, \delta[\subset \mathcal{O}$ qui contient (a, b) et une unique application $\phi :] \alpha, \beta[\rightarrow] \gamma, \delta[$ de classe \mathcal{C}^1 tels que :

$$\forall (x, y) \in] \alpha, \beta[\times] \gamma, \delta[, \quad g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x).$$

De plus

$$\phi'(a) = -\frac{\partial_1 g(a, b)}{\partial_2 g(a, b)}.$$

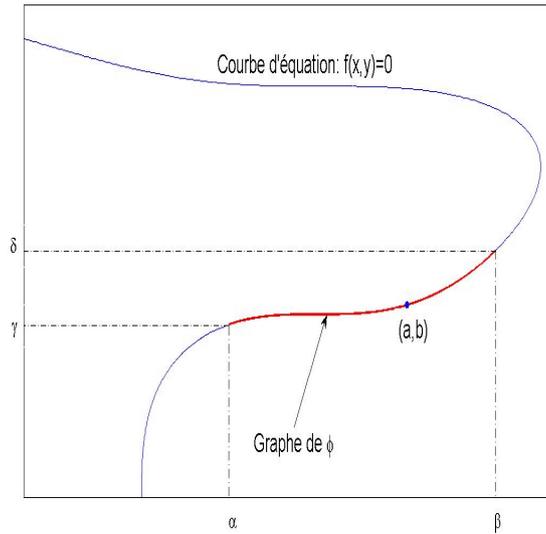
2. Si $\partial_1 g(a, b) \neq 0$ alors il existe un pavé $] \alpha, \beta[\times] \gamma, \delta[\subset \mathcal{O}$ qui contient (a, b) et une unique application $\psi :] \gamma, \delta[\rightarrow] \alpha, \beta[$ de classe \mathcal{C}^1 tels que :

$$\forall (x, y) \in] \alpha, \beta[\times] \gamma, \delta[, \quad g(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = \psi(y).$$

De plus

$$\psi'(b) = -\frac{\partial_2 g(a, b)}{\partial_1 g(a, b)}.$$

Le point 1. (resp. 2.) signifie que dans $] \alpha, \beta[\times] \gamma, \delta[$, \mathcal{C} est le graphe d'une unique application ϕ (resp. ψ). On dit que y (resp. x) est une fonction implicite de x (resp. y) au voisinage du point (a, b) .



Remarque. L'expression de $\phi'(a)$ ou de $\psi'(b)$ se retrouve facilement. Calculons $\phi'(a)$, le calcul de $\psi'(b)$ étant similaire. Pour tout x dans $]a, b[$, nous avons $g(x, \phi(x)) = 0$ (car $(x, \phi(x)) \in S$) et $\phi(a) = b$. En dérivant cette égalité au point a , on obtient :

$$\partial_1 g(a, b) + \phi'(a) \partial_2 g(a, b) = 0,$$

ce qui donne l'expression annoncée pour $\phi'(a)$. Il faut également remarquer que $\phi'(a)$ (ou $\psi'(b)$) correspond à la pente de la tangente à la courbe au point (a, b) : logique vu qu'au voisinage du point (a, b) , la courbe s'identifie au graphe de ϕ (ou de ψ).

Généralisation du théorème. Pour une hypersurface de \mathbb{R}^{n+1} d'équation $g(x) = 0$ avec g de classe \mathcal{C}^1 , le théorème précédent se généralise comme suit. Soit $a \in S$ tel que il existe un entier $i \in \{1, \dots, n+1\}$ pour lequel $\partial_i g(a) \neq 0$. Sans perte de généralité, supposons que $\partial_{n+1} g(a) \neq 0$. Alors il existe un pavé

$$V =]\alpha_1, \beta_1[\times \dots \times]\alpha_n, \beta_n[,$$

contenant a ainsi qu'un intervalle $]\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}[$ et une unique application $\phi : V \rightarrow]\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}[$ tels que

$$\forall x \in V \times]\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}[, \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow x_{n+1} = \phi(x_1, \dots, x_n).$$

De plus les dérivées partielles de ϕ vérifient

$$\partial_i \phi(a_1, \dots, a_n) = -\frac{\partial_i g(a_1, \dots, a_{n+1})}{\partial_{n+1} g(a_1, \dots, a_{n+1})}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

On peut retrouver l'expression de ces dérivées partielles en dérivant l'égalité

$$g(x_1, \dots, x_n, \phi(x_1, \dots, x_n)) = 0.$$

Équation du l'hyperplan tangent à une hypersurface de \mathbb{R}^{n+1} . Le théorème des fonctions implicites permet de justifier l'équation de l'hyperplan tangent donnée dans la Définition 34. Si S est une hypersurface de \mathbb{R}^{n+1} données par l'équation $g(x) = 0$ et a est un point de S , on sait que $\nabla g(a) \neq 0$. Sans perte de généralité, supposons que $\partial_{n+1} g(a) \neq 0$. Le théorème des

fonctions implicites assure que dans un voisinage du point a , la surface S s'identifie au graphe d'une application $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \phi(x_1, \dots, x_n)$. Or d'après la Définition 32, l'équation du plan tangent en a au graphe de ϕ est

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \partial_i \phi(a).$$

En utilisant l'expression des dérivées partielles de ϕ au point a , cette équation se réécrit :

$$\sum_{i=1}^{n+1} (x_i - a_i) \partial_i g(a) = 0.$$

Le taux marginal de substitution. Si $Q : (x, y) \rightarrow Q(x, y)$ est une fonction production, on définit les taux marginaux de substitution de Q par

$$T_1(a, b) = -\frac{\partial_1 Q(a, b)}{\partial_2 Q(a, b)}, \quad T_2(a, b) = -\frac{\partial_2 Q(a, b)}{\partial_1 Q(a, b)}.$$

On reconnaît les expressions des dérivées des fonctions implicites. Par exemple, si $Q(a, b) = k$ et $\partial_2 Q(a, b) \neq 0$, alors au voisinage du point (a, b) , on a $y = \phi(x)$ pour une fonction ϕ dérivable et $\phi'(a) = T_1(a, b)$. Supposons que l'on veuille augmenter la première quantité a d'une unité, soit $x = a + 1$. Alors si on veut déterminer la variation $y - b$ à donner à la deuxième quantité afin que $Q(x, y) = k$ (c'est à dire afin de garder le niveau de production inchangé), le développement limité à l'ordre 1 de ϕ permet d'écrire

$$y - b = \phi(x) - \phi(a) \approx \phi'(a).$$

Il faut donc ajouter environ $\phi'(a) = T_1(a, b)$ unités à la deuxième quantité pour garder le niveau de production inchangé. Remarquons qu'il est également possible de répondre à ce problème à partir du développement limité

$$k = Q(x, y) \approx Q(a, b) + \partial_1 Q(a, b) + (y - b) \partial_2 Q(a, b).$$

4.5 Dérivées partielles d'ordre supérieur. Formule de Taylor à l'ordre 2

Si \mathcal{O} est un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles, on définit pour $1 \leq i, j \leq n$

$$\partial_{ij} f = \partial_i (\partial_j f).$$

Sous réserve qu'elle soit bien définie, $\partial_{ij} f$ représente la dérivée partielle par rapport à la i -ième variable de la fonction $\partial_j f$. On dit que $\partial_{ij} f$ est une dérivée partielle seconde ou dérivée partielle d'ordre 2. Il y a donc n^2 dérivées partielles à l'ordre 2.

Exemple. Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x, y) = \ln(y^2 + \exp(x))$, alors les quatre dérivées partielles à l'ordre 2 sont données par

$$\partial_{11} f(x, y) = \frac{\exp(x)y^2}{y^2 + \exp(x)}, \quad \partial_{22} f(x, y) = \frac{2\exp(x) - 2y^2}{(y^2 + \exp(x))^2}, \quad \partial_{12} f(x, y) = \partial_{21} f(x, y) = \frac{-2y \exp(x)}{(y^2 + \exp(x))^2}.$$

On peut montrer l'égalité $\partial_{ij} f = \partial_{ji} f$ lorsque f est de classe \mathcal{C}^2 (c'est à dire lorsque les dérivées partielles à l'ordre 2 existent et sont continues). Ce résultat est connu sous le nom de théorème

de Schwarz.

On peut également définir des dérivées partielles d'ordre supérieur (3, 4 et plus) : si $k \geq 2$, les dérivées partielles à l'ordre $k + 1$ sont obtenues en prenant les dérivées partielles des dérivées partielles à l'ordre k .

Le théorème suivant sera fondamental pour déterminer la nature des points critiques d'une fonction de plusieurs variables.

Théorème 5 Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Si a est un point de \mathcal{O} et h un vecteur tel que $a + h \in \mathcal{O}$ alors

$$f(a + h) = f(a) + (\nabla f(a)|h) + \frac{1}{2}h^T \nabla^2 f(a)h + \|h\|^2 \varepsilon(h),$$

où

- ε désigne une fonction définie au voisinage de a , à valeurs réelles et telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.
- $\nabla^2 f(a) = (\partial_{ij} f(a))_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice symétrique des dérivées partielles secondes au point a . On l'appelle matrice Hessienne de f au point a .

Ce résultat est l'analogie du développement limité à l'ordre 2 des fonctions d'une variable. On parle de formule de Taylor à l'ordre 2. Par rapport à la formule à l'ordre 1, un terme est rajouté dans l'approximation de $f(a + h)$ lorsque h est proche de 0 : il s'agit d'une forme quadratique (en h) dont la matrice représentative est la matrice Hessienne. Par exemple, lorsque $n = 2$, la formule s'écrit

$$f(a + h) = f(a) + h_1 \partial f(a) + h_2 \partial f(a) + \frac{1}{2} (\partial_{11} f(a) h_1^2 + 2 \partial_{12} f(a) h_1 h_2 + \partial_{22} f(a) h_2^2) + \|h\|^2 \varepsilon(h).$$

Chapitre 5

Les déterminants

Le déterminant est un outil très utile lorsqu'on manipule des matrices carrées. Toute matrice carrée se verra associer un nombre réel qui permettra entre autre

- de déterminer si cette matrice est inversible,
- d'établir des formules pour résoudre certains systèmes linéaires,
- d'établir une formule pour calculer l'inverse d'une matrice,
- de déterminer le signe des formes quadratiques.

Toutefois les formules permettant de calculer le déterminant d'une matrice sont un peu complexes et demandent d'importants calculs si la taille de la matrice est élevée. C'est pourquoi nous définirons d'abord le déterminant à partir de certaines propriétés de base et nous donnerons ensuite des formules permettant de le calculer à l'aide des coefficients de la matrice.

5.1 Définition du déterminant et premières propriétés

La définition du déterminant utilise la proposition suivante que nous admettrons. Dans la suite la notation $M = [C_1, C_2, \dots, C_n]$ signifiera que la matrice $M \in \mathcal{M}_n$ est composée des colonnes C_1, C_2, \dots, C_n .

Proposition 18 *Soit α un nombre réel. Il existe une unique application $f_\alpha : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes.*

1. Si deux colonnes de M sont identiques alors $f_\alpha(M) = 0$.
2. La propriété dite de multilinéarité suivante est vérifiée :

$$f_\alpha([C_1, \dots, C_{j-1}, C_j + D_j, C_{j+1}, \dots, C_n]) = f_\alpha([C_1, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_n]) + f_\alpha([C_1, \dots, C_{j-1}, D_j, C_{j+1}, \dots, C_n]),$$

pour $1 \leq i, j \leq n$ et si de plus λ est un nombre réel

$$f_\alpha([C_1, \dots, C_{j-1}, \lambda C_j, C_{j+1}, \dots, C_n]) = \lambda f_\alpha([C_1, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_n]).$$

3. $f_\alpha(I_n) = \alpha$.

La propriété de multilinéarité de l'application f_α permet par exemple d'écrire, si $n = 3$,

$$\begin{aligned} f_\alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= f_\alpha \begin{pmatrix} 1+1 & 1 & 0 \\ 1+3 & 1 & 2 \\ 1+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= f_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + f_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou encore

$$f_\alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2f_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 35 Si $\alpha = 1$, l'unique application f_1 de la proposition précédente est appelé le déterminant. Le nombre $f_1(M)$ est noté $\det(M)$ et est appelé le déterminant de la matrice M . On notera également le déterminant en remplaçant les parenthèses de la notation matricielle par des barres :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}.$$

Proposition 19 1. Si $M \in \mathcal{M}_n$ et \widetilde{M} est la matrice obtenue en échangeant deux colonnes de M alors $\det(\widetilde{M}) = -\det(M)$.

2. On ne change pas la valeur du déterminant si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

Exemple. On a les égalités

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix},$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix},$$

en remplaçant C_2 par $C_2 + 2C_1$.

Preuve de la proposition

1. Sans perte de généralité, nous étudierons l'échange de C_1 et C_2 . Il suffit d'utiliser la multilinéarité et la propriété d'annulation du déterminant lorsque deux colonnes sont identiques.

$$\begin{aligned} 0 &= \det([C_1 + C_2, C_1 + C_2, C_3, \dots, C_n]) \\ &= \det([C_1, C_1 + C_2, C_3, \dots, C_n]) + \det([C_2, C_1 + C_2, C_3, \dots, C_n]) \\ &= \det([C_1, C_1, C_3, \dots, C_n]) + \det([C_1, C_2, C_3, \dots, C_n]) \\ &+ \det([C_2, C_1, C_3, \dots, C_n]) + \det([C_2, C_2, C_3, \dots, C_n]) \\ &= 0 + \det(M) + \det(\widetilde{M}) + 0. \end{aligned}$$

On en déduit $\det(\widetilde{M}) = -\det(M)$ ce qui prouve le premier point.

2. Si par exemple on remplace la colonne C_1 par

$$\widetilde{C}_1 = C_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j C_j,$$

où $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des nombres réels donnés, on a

$$\begin{aligned} \det([\widetilde{C}_1, C_2, C_3, \dots, C_n]) &= \sum_{j=2}^n \alpha_j \det([C_j, C_2, C_3, \dots, C_n]) \\ &+ \det([C_1, C_2, C_3, \dots, C_n]) \\ &= \det([C_1, C_2, C_3, \dots, C_n]) \end{aligned}$$

en remarquant qu'il y a répétition de deux colonnes dans les $n - 1$ premiers déterminants. Ceci prouve le résultat lorsqu'on remplace la première colonne. La preuve est identique pour les autres colonnes. \square

5.1.1 Expression du déterminant pour une matrice de type (2, 2)

Soit $M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ une matrice (2, 2). En notant $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a la décomposition

$$M = [aE_1 + bE_2, cE_1 + dE_2].$$

En utilisant les propriétés du déterminants (Proposition 18 et 19), nous obtenons

$$\begin{aligned} \det(M) &= ac \det([E_1, E_1]) + bc \det([E_2, E_1]) + ad \det([E_1, E_2]) + bd \det([E_2, E_2]) \\ &= (ad - bc) \det([E_1, E_2]) \\ &= ad - bc. \end{aligned}$$

Nous avons donc la formule

$$\det(M) = ad - bc.$$

5.1.2 Expression du déterminant pour une matrice (3, 3)

On va donner une expression du déterminant pour une matrice de type (3, 3),

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = [C_1, C_2, C_3].$$

La première colonne C_1 de M peut s'écrire

$$C_1 = m_{11}E_1 + m_{21}E_2 + m_{31}E_3,$$

où

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'utilisation de la multilinéarité permet alors d'écrire

$$\det(M) = m_{11} \det([E_1, C_2, C_3]) + m_{21} \det([E_2, C_2, C_3]) + m_{31} \det([E_3, C_2, C_3]).$$

Il faut ensuite calculer séparément les trois termes du membre de droite en utilisant la multilinéarité sur la deuxième colonne. Par exemple, on a

$$\begin{aligned} \det([E_1, C_2, C_3]) &= m_{12} \det([E_1, E_1, C_3]) + m_{22} \det([E_1, E_2, C_3]) + m_{32} \det([E_1, E_3, C_3]) \\ &= m_{22} \det([E_1, E_2, C_3]) + m_{32} \det([E_1, E_3, C_3]), \end{aligned}$$

où la deuxième égalité est une conséquence de la propriété 1. de la Proposition 18. Il faudrait ensuite itérer ce procédé sur la colonne C_3 .

Au total on obtient 6 termes non nuls dans le développement du déterminant :

$$\begin{aligned} \det(M) = & m_{11}m_{22}m_{33} \det(I_3) + m_{11}m_{32}m_{23} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ & + m_{21}m_{12}m_{33} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + m_{21}m_{32}m_{13} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ & + m_{31}m_{12}m_{23} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + m_{31}m_{22}m_{13} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Enfin il faut utiliser des permutations sur les colonnes des matrices du membre de droite pour retrouver au signe près $\det(I_3) = 1$ (en utilisant le point 3. de la Proposition 18 ainsi que le point 1. de la Proposition 19). Par exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\det(I_3),$$

en permutant C_2 et C_3 . Il faut parfois permuter deux fois de suite :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \det(I_3),$$

en permutant d'abord C_1 et C_3 puis C_2 et C_3 .

Nous obtenons finalement la formule suivante :

$$\begin{aligned} \det(M) = & m_{11}m_{22}m_{33} + m_{21}m_{12}m_{33} + m_{31}m_{22}m_{13} \\ & - m_{11}m_{32}m_{23} - m_{21}m_{12}m_{33} - m_{31}m_{22}m_{13} \end{aligned}$$

La méthode de Sarrus permet de retrouver cette formule, en recopiant les deux premières lignes de la matrice M sous la matrice :

$$\begin{array}{ccc} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{array}.$$

On effectue ensuite les produits le long de chaque diagonale coloriée. Chaque produit est muni du signe $-$ si il est calculé le long d'une diagonale ascendante et du signe $+$ sinon. Le déterminant est obtenu en effectuant la somme des six produits. Exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{array}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \det(M) = & 1 \times 2 \times 3 + (-1) \times (-2) \times 2 + 5 \times 1 \times 3 - (5 \times 2 \times 2 + 1 \times (-2) \times 3 + (-1) \times 1 \times 3) \\ = & 14. \end{aligned}$$

Attention, cette méthode s'applique uniquement si $n = 3$.

La proposition suivante donne des propriétés du déterminant qui sont, pour le cas $n = 2$ ou $n = 3$, des conséquences directes des expressions obtenues en fonction des coefficients. Nous admettrons leur généralisation au cas $n \geq 1$. La proposition suivante ainsi que la Proposition 18 peuvent en fait se justifier en utilisant des calculs similaires à ceux que nous avons effectués dans la cas $n = 2$ puis $n = 3$. Toutefois ces calculs sont un peu laborieux dans le cas général et demanderaient l'introduction de notions supplémentaires pour être menés de façon précise.

Proposition 20 *Soit n un entier plus grand que 1. Le déterminant d'une matrice M de \mathcal{M}_n vérifie les propriétés suivantes.*

1. $\det(M) = \det(M^T)$.
2. *En conséquence, les propositions 18 et 19 sont encore vraies si on remplace les propriétés énoncées sur les colonnes par les propriétés analogues sur les lignes d'une matrice.*
3. *Si M est une matrice triangulaire supérieure ou inférieure alors le déterminant de M est donné par le produit des éléments diagonaux*

$$\det(M) = m_{1,1}m_{2,2} \cdots m_{n,n}.$$

Par exemple, la propriété de multilinéarité sur les lignes (point 2.) permet d'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0.5 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1.5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes peuvent être utilisées pour le calcul du déterminant. Par exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 1 = 2,$$

en utilisant le remplacement $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et le point 3. de la proposition précédente. Attention cependant à ces opérations élémentaires : l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$ modifie la valeur du déterminant (le déterminant est alors multiplié par λ). Mais à part cette restriction, on peut toujours triangulariser la matrice en utilisant la méthode du pivot de Gauss et en déduire facilement la valeur du déterminant en effectuant le produit des éléments diagonaux de la matrice obtenue.

5.1.3 Cas général : développement du déterminant suivant une ligne ou une colonne

Dans le cas général, l'expression du déterminant que l'on obtiendrait en effectuant les calculs comme pour les cas $n = 2$ et $n = 3$ est assez compliquée dès que $n \geq 4$ et n'est guère utilisable. Pour calculer le déterminant d'une matrice, on peut par exemple se ramener à une matrice triangulaire à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes, comme dans l'exemple donné au paragraphe précédent. Il existe néanmoins des formules pour calculer le déterminant d'une matrice M de taille n à l'aide de déterminants de certaines matrices "extraites" de M et qui sont toutes de taille $n - 1$. On peut ainsi itérer le procédé pour effectuer le calcul du déterminant initial.

Definition 36 Si $M \in \mathcal{M}_n$ et $1 \leq i, j \leq n$, nous noterons $M_{i,j}$ la matrice obtenue en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne de M . Alors le nombre $\gamma(M)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{i,j})$ est appelé le cofacteur d'indice (i, j) de M .

Par exemple si $M \in \mathcal{M}_3$, on a $M_{2,2} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix}$ et

$$\gamma(M)_{22} = (-1)^4 \det(M_{2,2}) = m_{11}m_{33} - m_{31}m_{13}.$$

La proposition suivante sera utilisé dans la suite.

Proposition 21 Soit $M \in \mathcal{M}_n$ et $1 \leq i, j \leq n$. Alors

$$\gamma(M)_{ij} = \begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{1,j-1} & 0 & m_{1,j+1} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{i-1,1} & \dots & m_{i-1,j-1} & 0 & m_{i-1,j+1} & \dots & m_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{i+1,1} & \dots & m_{i+1,j-1} & 0 & m_{i+1,j+1} & \dots & m_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{n,j-1} & 0 & m_{n,j+1} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

Preuve. En utilisant $i-1$ inversions de lignes et $j-1$ inversions de colonnes, on peut montrer que le déterminant du membre de droite vaut

$$(-1)^{i+j-2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_{i,j} & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_{i,j} & \\ 0 & & & \end{vmatrix}.$$

Pour prouver que l'on obtient bien le cofacteur annoncé, il suffit de remarquer que l'application g définie sur \mathcal{M}_{n-1} par

$$g(N) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{vmatrix},$$

vérifie toutes les propriétés du déterminant sur \mathcal{M}_{n-1} (voir la Proposition 18) et donc par unicité : $g(N) = \det(N)$. \square

Nous allons déduire de la proposition précédente, des formules pour calculer le déterminant en fonction des cofacteurs.

Proposition 22 1. Si $1 \leq j \leq n$, on a

$$\det(M) = \sum_{i=1}^n m_{ij} \gamma(M)_{ij}.$$

On dit que l'on a développé le déterminant suivant la j -ième colonne.

2. Si $1 \leq i \leq n$, on a

$$\det(M) = \sum_{j=1}^n m_{ij} \gamma(M)_{ij}.$$

On dit que l'on a développé le déterminant suivant la i -ième ligne de M .

Preuve. Nous prouvons uniquement le premier point, le deuxième étant une conséquence immédiate du premier en utilisant l'égalité $\det(M) = \det({}^tM)$ (Proposition 20). En notant C_j la j -ième colonne de M , nous avons la décomposition

$$C_j = \sum_{i=1}^n m_{ij} E_i,$$

où E_i désigne la matrice colonne contenant uniquement des 0 sauf le i -ème terme qui vaut 1. En utilisant la multilinéarité du déterminant, nous obtenons

$$\det(M) = \sum_{i=1}^n m_{ij} \det([C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n]).$$

En effectuant les opérations élémentaires $C_\ell \leftarrow C_\ell - E_i$ pour $1 \leq \ell \leq n$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \det([C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n]) &= \begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{1,j-1} & 0 & m_{1,j+1} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{i-1,1} & \dots & m_{i-1,j-1} & 0 & m_{i-1,j+1} & \dots & m_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{i+1,1} & \dots & m_{i+1,j-1} & 0 & m_{i+1,j+1} & \dots & m_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{n,j-1} & 0 & m_{n,j+1} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \gamma(M)_{ij}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité est une conséquence de la proposition précédente. Nous avons donc bien la formule annoncée. \square

Dans le cas $n = 3$, la proposition précédente permet d'obtenir six formules pour le calcul du déterminant. Pour déterminer le signe $(-1)^{i+j}$ intervenant dans le cofacteur d'indice (i, j) , on peut remarquer qu'il suffit de le connaître pour le premier élément de la colonne ou de la ligne choisie puisque il y a ensuite alternance des signes + et -.

Développement suivant la première ligne :

$$\det(M) = m_{11} \begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} - m_{12} \begin{vmatrix} m_{21} & m_{23} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix} + m_{13} \begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{vmatrix}.$$

Développement suivant la deuxième ligne :

$$\det(M) = -m_{21} \begin{vmatrix} m_{12} & m_{13} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} + m_{22} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix} - m_{23} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{31} & m_{32} \end{vmatrix}.$$

Développement suivant la troisième ligne :

$$\det(M) = m_{31} \begin{vmatrix} m_{12} & m_{13} \\ m_{22} & m_{23} \end{vmatrix} - m_{32} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{21} & m_{23} \end{vmatrix} + m_{33} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}.$$

Développement suivant la première colonne :

$$\det(M) = m_{11} \begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} - m_{21} \begin{vmatrix} m_{12} & m_{13} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} + m_{31} \begin{vmatrix} m_{12} & m_{13} \\ m_{22} & m_{23} \end{vmatrix}.$$

Développement suivant la deuxième colonne :

$$\det(M) = -m_{12} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix} + m_{22} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix} - m_{32} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{21} & m_{23} \end{vmatrix}.$$

Développement suivant la troisième colonne :

$$\det(M) = m_{13} \begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{vmatrix} - m_{23} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{31} & m_{32} \end{vmatrix} + m_{33} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}.$$

Les six formules peuvent être utiles lorsqu'il y a des zéros sur la ligne ou la colonne en question. De plus, une de ces six formules permet parfois d'effectuer un calcul plus rapide que la méthode de Sarrus vue au paragraphe précédent.

Dans la cas général, le calcul d'un déterminant d'ordre n est ramené au calcul de n déterminants

d'ordre $n - 1$. Par exemple, si $n = 4$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0.3 \\ -1 & 0.6 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, nous pouvons écrire en

développant le long de la première ligne

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 0.6 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 0.6 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0.3 \begin{vmatrix} -1 & 0.6 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Voici maintenant deux propriétés fondamentales du déterminant, avec en particulier un critère d'inversibilité d'une matrice carrée.

Proposition 23 1. Si A et B sont deux matrices carrées de taille n , alors

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

2. Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Dans ce cas, on a

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Preuve

1. Si $A \in \mathcal{M}_n$, considérons la fonction g définie sur \mathcal{M}_n par $g(B) = \det(AB)$. Il est facile de prouver que $g = f_\alpha$ avec $\alpha = \det(A)$, car g vérifie bien toutes les propriétés de la Proposition 18. Il en est de même de l'application $h : B \rightarrow \det(A) \det(B)$, ce qui permet de conclure que $g(B) = h(B)$ pour toute matrice B . L'égalité $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ est donc bien vérifiée.

2. Montrons le deuxième point. Supposons d'abord que la matrice A soit inversible. Alors

$$\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1.$$

En utilisant le point 1., on obtient l'égalité $\det(A) \det(A^{-1}) = 1$, ce qui prouve que le déterminant de A est non nul et que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Pour prouver que la condition est également suffisante, raisonnons par contraposée en supposant la matrice A non inversible. D'après la Proposition 11 du Chapitre 2, le rang de A est plus petit que n et les vecteurs colonnes de la matrice A sont donc liés. Ainsi, $\det(A) = 0$ puisque une colonne de A s'écrit comme combinaison linéaire des autres colonnes. \square

Finissons ce paragraphe par deux formules utiles pour le calcul du déterminant lorsque la matrice est définie par blocs.

Proposition 24 Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $n = p + q$, $A \in \mathcal{M}_p$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}$, $C \in \mathcal{M}_q$ et $D \in \mathcal{M}_{q,p}$.

On définit $M \in \mathcal{M}_n$ par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Alors $\det(M) = \det(A) \det(C)$.

- Si A est inversible et $N \in \mathcal{M}_n$ est défini par

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix},$$

alors $\det(N) = \det(A) \det(C - DA^{-1}B)$.

Preuve Pour prouver le premier point, on peut utiliser la décomposition

$$M = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_q \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

La multiplication des matrices définies par blocs s'effectue de la même façon que la multiplication usuelle des matrices. Par exemple, on a

$$\begin{pmatrix} U & V \\ W & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} UE + VG & UF + VH \\ WE + ZG & WF + ZH \end{pmatrix},$$

lorsque les tailles des blocs sont compatibles pour effectuer les multiplications.

En effectuant des développements successifs du déterminant suivant les p premières lignes, on peut facilement montrer que

$$\begin{vmatrix} I_p & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det(C).$$

De même, en développant le déterminant suivant les q dernières lignes, on obtient

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & I_q \end{vmatrix} = \det(A).$$

Finalement en utilisant la décomposition 5.1 et la formule du déterminant pour un produit (cf Proposition 23), on conclut

$$\det(M) = \det(A) \det(C).$$

Pour prouver le deuxième point, on utilise les opérations élémentaire suivantes :

$$[C_{p+1}, \dots, C_n] \leftarrow [C_{p+1}, \dots, C_n] - [C_1, \dots, C_p]A^{-1}C.$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{vmatrix}.$$

En appliquant le premier point (en fait à la transposée de la dernière matrice), on obtient la deuxième formule. \square

5.2 Application à la résolution des systèmes linéaires

Le déterminant va permettre de trouver des formules pour la résolution des systèmes linéaires de la forme $AX = B$ où A est une matrice carrée inversible. D'après la Proposition 23, il suffit de montrer que $\det(A) \neq 0$ pour justifier l'inversibilité de A . Si $A = [C_1, \dots, C_n]$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a $B = \sum_{i=1}^n x_i C_i$. En utilisant la multilinéarité du déterminant, nous avons si $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} \det([C_1, \dots, C_{k-1}, B, C_{k+1}, \dots, C_n]) &= \det\left([C_1, \dots, C_{k-1}, \sum_{i=1}^n x_i C_i, C_{k+1}, \dots, C_n]\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \det([C_1, \dots, C_{k-1}, C_i, C_{k+1}, \dots, C_n]) \\ &= x_k \det(A). \end{aligned}$$

La dernière égalité utilise le fait qu'un déterminant est nul lorsque deux colonnes sont identiques. Nous obtenons ainsi les formules suivantes appelées formules de Cramer.

Proposition 25 Si A est inversible, l'unique solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ du système linéaire $AX = B$ vérifie

$$x_k = \frac{\det([C_1, \dots, C_{k-1}, B, C_{k+1}, \dots, C_n])}{\det(A)}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Remarque. Même dans le cas où la matrice A est inversible, la méthode du pivot de Gauss présente un intérêt car elle est plus économique en terme de calculs par rapport aux formules de Cramer. En effet, on peut montrer qu'il faut au plus $\frac{n(4n^2+15n-13)}{6}$ opérations (+ et \times) pour résoudre le système en utilisant le pivot de Gauss. En revanche le calcul d'un déterminant d'une matrice de taille n demande $n \times n! - 1$ opérations et donc les formules de Cramer demandent $n(n+1)! - 1$ opérations. Ainsi, le pivot de Gauss est plus économe à partir de $n = 3$.

5.3 Application au calcul de l'inverse d'une matrice carrée

Proposition 26 Soit A une matrice inversible. La matrice inverse de A est donnée par la formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \tilde{A},$$

où $\tilde{A} = (\gamma(A)_{ij})_{i,j}$ est la matrice des cofacteurs de A , aussi appelée comatrice de A .

Preuve. D'après la Proposition 21, on a l'expression

$$\gamma(A)_{ij} = \det([C_1, \dots, C_{k-1}, E_i, C_{k+1}, \dots, C_n]).$$

Ainsi si $1 \leq i, j \leq n$,

$$\begin{aligned} ({}^t \tilde{A} A)(i, j) &= \sum_{k=1}^n \gamma(A)_{ki} A(k, j) \\ &= \det([C_1, \dots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \dots, C_n]) \\ &= \det(A) \delta_{ij}, \end{aligned}$$

où δ_{ij} est une variable qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Ceci prouve l'égalité ${}^t\tilde{A}A = \det(A)I_n$. \square

Exemple. Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ qui vérifie $\det(M) = 7$. Pour calculer la comatrice, on peut inscrire au préalable les signes $(-1)^{i+j}$ sur la matrice et calculer ensuite les déterminants 2×2 .

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} +(-5) & -(-7) & +1 \\ -(-2) & +0 & -(-1) \\ +3 & -0 & +(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

L'inverse de M est donné par

$$M^{-1} = \frac{1}{7}\tilde{M}^T = \begin{pmatrix} \frac{-5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} \end{pmatrix}.$$

5.4 Valeurs propres d'une matrice carrée

5.4.1 Diagonalisation d'une matrice carrée

Definition 37 On dit qu'un réel λ est une valeur propre d'une matrice M de \mathcal{M}_n si

$$\det(M - \lambda I_n) = 0.$$

Interprétation. D'après la Proposition 23, dire que λ est une valeur propre de M signifie que la matrice $M - \lambda I_n$ est non inversible. En utilisant la Proposition 11, on en déduit qu'il existe un vecteur non nul X de \mathbb{R}^n tel que $(M - \lambda I_n)X = 0$, ou encore $MX = \lambda X$.

Definition 38 Si λ est une valeur propre, alors tout vecteur non nul X tel que $MX = \lambda X$ est appelé un vecteur propre associé à la valeur propre λ .

Remarques

- On peut remarquer que

$$E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : MX = \lambda X\}$$

est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

- On peut montrer que la fonction $\lambda \mapsto \det(M - \lambda I_n)$ est une fonction polynomiale de degré n . Ce polynôme est appelé polynôme caractéristique de M . Un polynôme de degré n admettant au plus n racines, la matrice M possède au plus n valeurs propres.

Exemples

- La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonale. Le polynôme caractéristique \mathcal{P}_M de la matrice M est donnée par

$$\mathcal{P}_M(\lambda) = (1 - \lambda)(0.5 - \lambda)(2 - \lambda)$$

et les valeurs propres correspondent aux éléments diagonaux de M : 1, 0.5 et 2. Pour trouver les vecteurs propres, il faut pour chaque valeur propre λ , résoudre en X le système linéaire $AX = \lambda X$ qui se réécrit $(A - \lambda I_n)X = 0$. Ainsi les vecteurs propres associés respectivement à $\lambda = 1, 0.5, 2$ sont de la forme $\alpha \mathbf{e}_1, \beta \mathbf{e}_2, \gamma \mathbf{e}_3$, où $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^n et α, β, γ sont des nombres réels non nuls.

– Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$\det(M - \lambda I_2) = (1 - \lambda)^2 - 4.$$

Les valeurs propres de M sont $\lambda = -1$ et $\lambda = 3$. Les vecteurs propres associés à $\lambda = -1$ sont de la forme $X = \begin{pmatrix} z \\ -z \end{pmatrix}$ où z est un nombre réel non nul.

Definition 39 On dit qu'une matrice carrée M est diagonalisable si il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}MP$ soit une matrice diagonale.

La diagonalisation d'une matrice ne peut se faire qu'en utilisant les valeurs et vecteurs propres.

Proposition 27 Si M est diagonalisable avec $D = P^{-1}MP$ matrice diagonale alors pour $1 \leq i \leq n$, $D(i, i)$ est une valeur propre de M et la i -ième colonne de P est un vecteur propre de M , associé à la valeur propre $D(i, i)$.

Preuve. L'égalité $D = P^{-1}MP$ s'écrit aussi $MP = PD$. Si C_i désigne la i -ème colonne de P , alors la i -ème colonne de MP s'écrit MC_i et la i -ème colonne de PD s'écrit $D(i, i)C_i$. On a donc l'égalité $MC_i = D(i, i)C_i$ avec C_i non nul (sinon P ne serait pas inversible), ce qui est exactement la conclusion de la proposition. \square

Remarques

- Diagonaliser une matrice revient en fait à trouver une base de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres. En effet la matrice P , dont les colonnes sont des vecteurs propres de M doit être inversible, ce qui signifie que ces vecteurs colonnes forment une base de \mathbb{R}^n .
- Il n'est pas toujours possible de diagonaliser une matrice. Par exemple la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. Pour le vérifier sans calcul, on peut remarquer qu'il y a une seule valeur propre de multiplicité 2 : $\lambda = 1$. Si M était diagonalisable, on aurait les égalités

$$M = PDP^{-1} = PI_2P^{-1} = I_2,$$

ce qui est absurde.

Application au calcul des puissances d'une matrice carrée. On peut facilement calculer les puissances de M à l'aide de la formule $M^k = PD^kP^{-1}$. La matrice diagonale D^k est facile à obtenir : il suffit d'élever tous les éléments diagonaux de D à la puissance k .

Pour une matrice diagonalisable, la trace et le déterminant s'exprime simplement en fonction des valeurs propres.

Proposition 28 Si M est une matrice diagonalisable, on note par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses n valeurs propres. On a

$$\det(M) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \quad \text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Preuve. Si $M = PDP^{-1}$ alors nous avons en utilisant la Proposition 23

$$\det(M) = \det(P) \det(D) \det(P^{-1}) = \det(D) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

De plus en utilisant la Proposition 4, on obtient

$$\text{Tr}(M) = \text{Tr}(P^{-1}PD) = \text{Tr}(D) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

La proposition suivante donne deux types de matrices pour lesquelles la diagonalisation est toujours possible. \square

Proposition 29 1. Si $M \in \mathcal{M}_n$ possède n valeurs propres distinctes, alors M est diagonalisable.

2. Si M est symétrique (i.e $M^T = M$), alors M est diagonalisable et les vecteurs propres peuvent être choisis tels que $P^{-1} = P^T$.

Preuve. Nous prouverons uniquement que le premier point et nous admettrons le second. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ désigne les n valeurs propres distinctes de M et C_1, \dots, C_n des vecteurs propres associés, on pose $P = [C_1, \dots, C_n]$. On a alors

$$MP = PD = [\lambda_1 C_1, \dots, \lambda_n C_n].$$

Il suffit de prouver que P est une matrice inversible, c'est à dire que le système $\{C_1, \dots, C_n\}$ est libre dans \mathbb{R}^n . Nous allons prouver par récurrence sur $i \in \{1, \dots, n\}$ que le système $\{C_1, \dots, C_i\}$ est libre. Si $i = 1$, c'est clair car C_1 est non nul. Supposons le système $\{C_1, \dots, C_i\}$ libre pour un entier i tel que $1 \leq i \leq n - 1$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}$ des nombres réels tels que

$$V = \alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_{i+1} C_{i+1} = 0$$

pour des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. On a alors une autre égalité

$$0 = MV = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j C_j.$$

Ainsi, nous obtenons

$$0 = MV - \lambda_{i+1} V = \sum_{j=1}^i (\lambda_j - \lambda_{i+1}) \alpha_j C_j = 0.$$

Vu que les valeurs propres sont toutes distinctes, l'hypothèse de récurrence entraîne que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_i = 0$. Revenant à l'expression de V , on en déduit également que $\alpha_{i+1} = 0$, ce qui montre que le système $\{C_1, \dots, C_{i+1}\}$ est libre.

D'après le principe de récurrence, on conclut que les vecteurs C_1, \dots, C_n sont libres et donc que P est une matrice inversible, ce qui termine la preuve. \square

5.5 Étude du signe d'une forme quadratique

Dans ce paragraphe, nous considérons une matrice symétrique M et sa forme quadratique associée $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(h) = h^T M h$. Lorsque la matrice M est diagonale, il est facile de connaître le signe de q . En effet, on a dans ce cas l'égalité

$$q(h) = \sum_{i=1}^n m_{ii} h_i^2,$$

et donc on $q(h) \geq 0$ (resp. $q(h) \leq 0$) pour tout h dans \mathbb{R}^n si et seulement si $m_{i,i} \geq 0$ (resp. ≤ 0) pour tout i . Dans le cas d'une matrice M non diagonale, le problème est moins évident. Introduisons d'abord quelques définitions.

Definition 40 Soit q une forme quadratique sur \mathbb{R}^n .

1. On dit que q est semi-définie positive si

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad q(h) \geq 0.$$

2. On dit que q est définie positive si

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad q(h) > 0.$$

3. On dit que q est semi-définie négative si

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad q(h) \leq 0.$$

4. On dit que q est définie négative si

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad q(h) < 0.$$

Remarques

- On peut remarquer que q est (semi-)définie négative si et seulement si $-q$ est (semi-)définie positive, ce qui permettra facilement d'énoncer des résultats pour les formes quadratiques négatives à partir de résultats sur les formes quadratiques positives.
- Comme $q(0) = 0$, si q est définie positive alors q est aussi semi-définie positive. Le contraire n'est évidemment pas vrai (par exemple si q est nulle).

5.5.1 Valeurs propres et signe d'une forme quadratique

Le signe de q peut s'étudier directement en regardant le signe des valeurs propres de la matrice M .

Proposition 30 1. q est semi-définie positive (resp. définie positive) si et seulement si toutes les valeurs propres de M sont positives (resp. strictement positives).

2. q est semi-définie négative (resp. définie négative) si et seulement si toutes les valeurs propres de M sont négatives (resp. strictement négatives).

Preuve. Montrons uniquement le premier point, le deuxième se déduisant du premier en considérant la forme quadratique $-q$. La condition est nécessaire : en effet si h est un vecteur propre de M associé à une valeur propre λ , on a $q(h) = h^T M h = \lambda \|h\|^2$, ce qui prouve que λ est positif (resp. strictement positif) si q est semi-définie positive (resp. définie positive).

Pour montrer que la condition est suffisante, supposons que toutes les valeurs propres de M sont positives (resp. strictement positives). La Proposition 29 assure l'existence d'une matrice inversible P , d'inverse $P^{-1} = {}^t P$ et telle que $P^T M P$ soit égale à une matrice diagonale D (dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de M). En posant $k = P^T h$, il est facile de vérifier que $\|k\| = \|h\|$. De plus, nous avons

$$q(h) = h^T M h = {}^t k D k = \sum_{i=1}^n D(i, i) k_i^2.$$

Ainsi si $\alpha = \min \{D(i, i) : 1 \leq i \leq n\}$, on a alors pour tout h dans \mathbb{R}^n ,

$$h^T M h \geq \alpha \|k\|^2 = \alpha \|h\|^2.$$

On en déduit que si α est positif (resp. strictement positif) alors q est semi-définie positive (resp. définie positive). \square

Le cas de la dimension 2. Si $n = 2$, on peut déduire du résultat précédent un critère qui utilise uniquement la trace et le déterminant de M (ce qui évite le calcul des valeurs propres). En effet en utilisant la Proposition 28, on peut observer que

- Si $\det(M) > 0$ et $\text{Tr}(M) > 0$, le produit des deux valeurs propres est > 0 ainsi que leur somme. Ces deux valeurs propres sont donc toutes les deux strictement positives et q est donc définie positive.
- Si $\det(M) > 0$ et $\text{Tr}(M) < 0$, les deux valeurs propres sont strictement négatives. q est donc définie négative.
- Si $\det(M) = 0$ et $\text{Tr}(M) > 0$, une valeur propre est nulle et l'autre est strictement positive. q est donc semi-définie positive.
- Si $\det(M) = 0$ et $\text{Tr}(M) < 0$, une valeur propre est nulle et l'autre est strictement négative. q est donc semi-définie négative.

5.5.2 Signe d'une forme quadratique : le critère des mineurs

Le critère suivant peut être utile car il ne nécessite pas de calculer les valeurs propres.

Proposition 31 1. Une forme quadratique $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(h) = h^T M h$ est définie positive si et seulement si les mineurs principaux dominants de M sont strictement positifs, c'est à dire

$$\forall p \in \{1, \dots, n\}, \quad \begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1} & \cdots & m_{pp} \end{vmatrix} > 0.$$

2. Une forme quadratique $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(h) = h^T M h$ est définie négative si et seulement si les mineurs principaux dominants de M sont du même signe que $(-1)^p$, c'est à dire

$$\forall p \in \{1, \dots, n\}, \quad (-1)^p \begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1} & \cdots & m_{pp} \end{vmatrix} > 0.$$

Remarque. Si tous les mineurs principaux dominants sont positifs avec au moins un mineur nul, on ne peut pas conclure sur le signe de la forme quadratique.

Preuve. Prouvons le premier point, le deuxième point se déduit du premier point appliqué à la forme quadratique $-q$ et en utilisant l'égalité $\det(-N) = (-1)^p \det(N)$ pour toute matrice N de taille p . Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Si q est définie positive, alors si $1 \leq p \leq n$, la sous-matrice

$$M_p = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{p1} & \cdots & m_{pp} \end{pmatrix}$$

l'est également car si $k = (h_1, \dots, h_p, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$, on peut vérifier que

$$k^T M k = (k_1 \quad \dots \quad k_p) M_p \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_p \end{pmatrix} > 0,$$

pour tout $h = (h_1, \dots, h_p)$ non nul. Ainsi toutes les valeurs propres de M_p sont strictement positives (d'après la proposition précédente) et donc le déterminant de M_p (qui est le mineur principal dominant d'ordre p) est strictement positif, d'après la formule de la Proposition 28.

Montrons que la condition est suffisante en procédant par récurrence sur n . Lorsque $n = 1$, on a $q(h) = m_{11}h_1^2$ et donc q est bien définie positive. Supposons le résultat vrai pour n et prouvons-le pour des matrices de taille $n + 1$. En écrivant $M = \begin{pmatrix} M_n & a \\ a^T & d \end{pmatrix}$ où M_n est une matrice carrée de taille n , a est une matrice colonne de taille $(n, 1)$ et d est un nombre réel, on utilise la décomposition

$$M = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ a^T M_n^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_n & 0 \\ 0 & d - a^T M_n^{-1} a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A_n^{-1} a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} M_n & 0 \\ 0 & d - a^T M_n^{-1} a \end{pmatrix} Q.$$

Notons que l'hypothèse de récurrence garantit que la matrice M_n , qui a tous ses mineurs principaux dominants strictement positifs, est définie positive et donc est inversible. En utilisant les propriétés du déterminant (Proposition 23 et Proposition 24), on en déduit l'égalité

$$\det(M) = \det(M_n) \times (d - a^T M_n^{-1} a).$$

Comme par hypothèse $\det(M) > 0$ (c'est le mineur principal dominant d'ordre n), on a forcément $d - a^T M_n^{-1} a > 0$. Ainsi on a si $h \in \mathbb{R}^n$ et $k = Qh$

$$q(h) = k^T \begin{pmatrix} M_n & 0 \\ 0 & d - a^T M_n^{-1} a \end{pmatrix} k = (k_1 \quad \dots \quad k_{n-1}) M_n \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-1} \end{pmatrix} + k_n^2 (d - a^T M_n^{-1} a).$$

Si $h \neq 0$ alors $k \neq 0$ (car Q est inversible) et donc on a forcément $q(h) > 0$, en utilisant que M_n est définie positive et que $d - a^T M_n^{-1} a > 0$. Le résultat est donc prouvé pour toute forme quadratique sur \mathbb{R}^{n+1} . Le principe de récurrence garantit alors que la condition de la proposition est suffisante pour tout n . \square

Chapitre 6

Optimisation des fonctions de plusieurs variables

6.1 Les extrema sans contrainte

Definition 41 Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

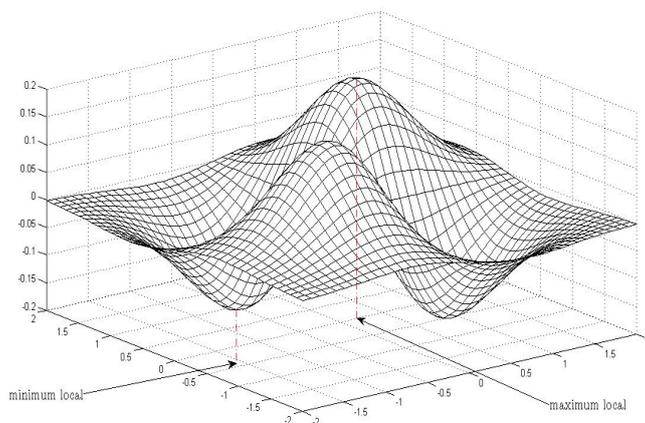
1. On dit que $a \in \mathbb{R}^n$ est un *minimum local* (resp. *minimum local strict*) de f si il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{O} \setminus \{a\}$, on ait

$$\|x - a\| \leq r \Rightarrow f(x) \geq (\text{ resp. } >)f(a).$$

2. On dit que $a \in \mathbb{R}^n$ est un *maximum local* (resp. *maximum local strict*) de f si il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{O} \setminus \{a\}$, on ait

$$\|x - a\| \leq r \Rightarrow f(x) \leq (\text{ resp. } <)f(a).$$

3. On dit que a est un *extremum local* si a est ou bien un *minimum local* ou bien un *maximum local*.
4. Lorsque $\forall x \in \mathcal{O} \setminus \{a\}$, $f(x) \geq f(a)$ (resp. $> f(a)$, $\leq f(a)$, $< f(a)$), on dira que a est un *minimum global* (resp. *minimum global strict*, *maximum global*, *maximum global strict*).



6.2 Extremum local sans contrainte. Condition nécessaire du premier ordre.

Théorème 6 Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Soit $a \in \mathcal{O}$ un extremum local de f . Alors le gradient de f au point a est nul :

$$\nabla f(a) = 0.$$

Remarques

- Considérons le cas $n = 2$. L'annulation du gradient correspond à l'annulation de toutes les dérivées partielles. Ainsi le théorème exprime que si a est un extremum local alors le plan tangent au graphe de f au point $(a, f(a))$ a pour équation : $z = f(a)$. Le plan tangent est donc parallèle au plan Oxy , ce qui est assez intuitif.
- Ce théorème ne donne qu'une condition nécessaire d'existence d'un extremum local. Cette condition n'est pas suffisante : on peut très bien avoir un gradient nul en un point sans que ce point soit un extremum local, comme le montre l'exemple de la fonction d'une variable réelle $x \rightarrow x^3$ en 0.
- Ce résultat ne s'applique pas lorsque la fonction est définie sur un ensemble qui n'est pas ouvert : la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ admet 0 pour minimum global et 1 pour maximum global sans que la dérivée ne s'annule en ces points.

Preuve du théorème. La preuve consiste à utiliser le résultat déjà connu pour les fonctions d'une variable réelle. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ et $D = \{t \in \mathbb{R} : a + tu \in \mathcal{O}\}$. Considérons la fonction $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(a + tu)$. On sait que 0 est un extremum local de g et que 0 appartient forcément à un intervalle ouvert inclus dans D . On a donc $g'(0) = 0$ ce qui s'écrit aussi

$$\sum_{i=1}^n \partial_i f(a) u_i = 0.$$

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. En prenant $u_i = 1$ et $u_j = 0$ si $j \neq i$, l'égalité précédente devient $\partial_i f(a) = 0$. Comme i est arbitraire, on a bien montré que toutes les dérivées partielles (donc le gradient) s'annulent. \square

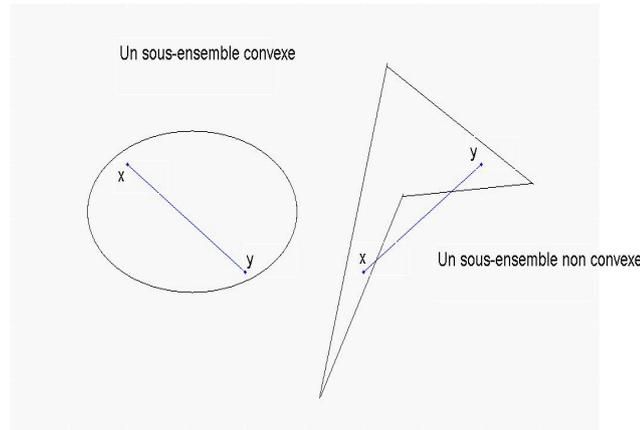
Definition 42 On reprend les notations du théorème précédant. Les points de \mathcal{O} qui vérifient la condition $\nabla f(a) = 0$ sont appelés points critiques (ou points stationnaires).

Exercice. Quels sont les points critiques des fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = x^2 y + x - y, \quad g(x, y) = x \exp(-x^2 - y^2) \quad ?$$

6.3 Les fonctions convexes ou concaves

Definition 43 Un ensemble ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n est dit convexe si tout segment reliant deux points quelconques de \mathcal{O} est inclus dans \mathcal{O} .



Remarque. On définit rigoureusement un segment $[x, y]$ de \mathbb{R}^n par

$$[x, y] = \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\} = \{(1 - t)x + ty : t \in [0, 1]\}.$$

C'est la première égalité qui rend cette définition la plus intuitive : on considère les translatés de x par les vecteurs $t\vec{xy}$ pour tous les $t \in [0, 1]$, on obtient x si $t = 0$ et y si $t = 1$. Si $t \in [0, 1]$, $(1 - t)x + ty$ est appelée une combinaison convexe de x et y .

Definition 44 Soient \mathcal{O} un ensemble ouvert et convexe de \mathbb{R}^n . Une fonction $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe (resp. concave) si pour tous x et y dans \mathcal{O} et tout $t \in [0, 1]$:

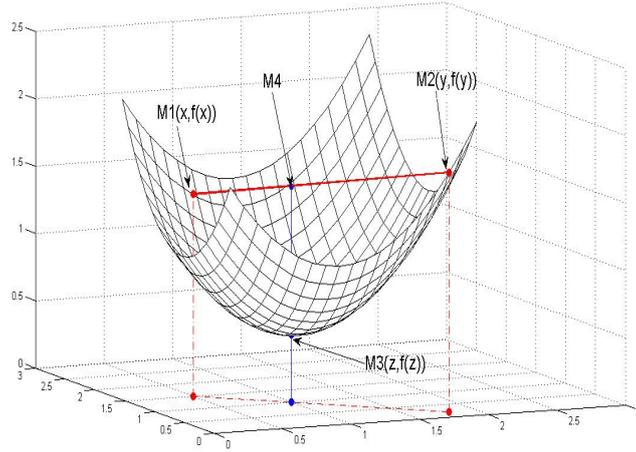
$$f((1 - t)x + ty) \leq \text{(resp. } \geq) (1 - t)f(x) + tf(y).$$

Exemples. Si $n = 1$, les fonctions $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow |x|$, $x \rightarrow \exp(x)$ sont définies et convexe sur \mathbb{R} . En revanche, la fonction logarithme $x \mapsto \ln(x)$ est définie et concave sur \mathbb{R}_+^* . Si $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto \|x\|$, qui associe à tout élément de \mathbb{R}^n sa norme euclidienne est convexe. Une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est à la fois convexe et concave. On peut remarquer qu'une somme de fonctions convexes (resp. concaves) est une fonction convexe (resp. concave).

Commentaire. La définition a une interprétation géométrique. Dire qu'une fonction f est convexe signifie qu'une corde tracée entre deux points du graphe de f est toujours situé au-dessus du graphe. Si $z \in [x, y]$ c'est-à-dire $z = (1 - t)x + ty$ pour un t dans $[0, 1]$, alors le point $M_4(z, (1 - t)f(x) + tf(y))$, appartenant à la corde d'extrémités $M_1(x, f(x))$ et $M_2(y, f(y))$, est situé au-dessus du point $M_3(z, f(z))$ qui appartient au graphe. D'où cette idée de graphe en forme de "cloche" lorsque on évoque une fonction convexe.

Remarque. On peut remarquer que f est convexe si et seulement si $-f$ est concave. Dans la suite, les résultats seront énoncés uniquement pour les fonctions convexes (il faudra les appliquer à $-f$ lorsque f est concave).

Une fonction convexe n'est pas nécessairement dérivable, comme le montre l'exemple de la fonction valeur absolue sur \mathbb{R} (non dérivable en 0). En revanche, on peut montrer qu'une fonction



convexe de n variables est toujours continue. Le théorème suivant donne deux caractérisations fondamentales des fonctions convexes de classe \mathcal{C}^1 ou \mathcal{C}^2 .

Théorème 7 Soit \mathcal{O} un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ est fonction de classe \mathcal{C}^1 .

1. f est convexe si et seulement si

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T \cdot (y - x), \quad x, y \in \mathcal{O}.$$

2. Supposons f de classe \mathcal{C}^2 . Alors f est convexe si et seulement si pour tout a appartenant à \mathcal{O} , $\nabla^2 f(a)$ induit une forme quadratique semi-définie positive (i.e. $\forall h \in \mathbb{R}^n, h^T \nabla^2 f(a) h \geq 0$).

Preuve

1. Supposons f convexe et posons $g(t) = f((1-t)x + ty)$ pour x et y fixés dans \mathcal{O} . L'inégalité de définition de la convexité s'écrit

$$\frac{g(t) - g(0)}{t} \leq \frac{g(1) - g(0)}{1} = f(y) - f(x), \quad 0 < t \leq 1.$$

En faisant tendre t vers 0, on obtient $g'(0) \leq f(y) - f(x)$. Mais le théorème de dérivation des fonctions composées assure que

$$g'(0) = Df(x)(y - x) = \nabla f(x)^T \cdot (y - x),$$

ce qui montre l'inégalité annoncée.

Réciproquement, on suppose cette inégalité vérifiée en tous points de \mathcal{O} . Posons $z = (1-t)x + ty$, $0 < t \leq 1$. On a alors

$$Df(z)(x - z) \leq f(x) - f(z) \text{ et } Df(z)(y - z) \leq f(y) - f(z).$$

En multipliant la première inégalité par $1-t$ et la seconde par t puis en ajoutant, il vient :

$$0 = Df(z)((1-t)x + ty - z) \leq (1-t)f(x) + tf(y) - f(z),$$

ce qui montre bien que l'inégalité de la Définition 44 est vérifiée.

2. Supposons que f soit convexe. Soit a un point de \mathbb{R}^n et h un vecteur. Si $s > 0$ est assez petit, alors $a + sh \in \mathcal{O}$. La formule de Taylor à l'ordre 2 assure que

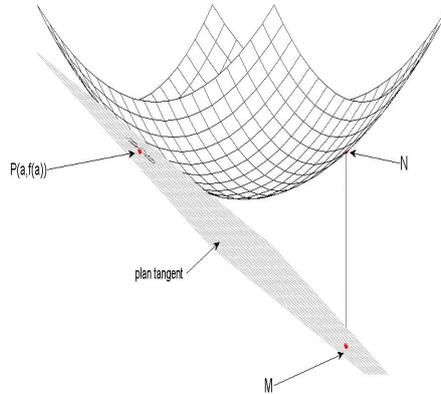
$$f(a + sh) - f(a) - \nabla f(a)^T sh = s^2 \times h^T \nabla^2 f(a) h + s^2 \|h\|^2 \varepsilon(sh).$$

Aussi, en utilisant le premier point, le membre de gauche est positif pour tout $s > 0$. En divisant par s^2 et en faisant tendre ensuite s vers 0, on obtient $h^T \nabla^2 f(a) h \geq 0$. La matrice Hessienne au point a définit donc une forme quadratique semi-définie positive.

Nous admettrons que la condition annoncée est également suffisante. \square

Remarques

1. Le premier point signifie géométriquement que le plan tangent est toujours situé au-dessous du graphe de f . C'est ce qu'exprime la figure ci-dessous où le point $M(a + h, f(a) + \nabla f(a)^T h)$ est situé sur le plan tangent au point $P(a, f(a))$ et est situé au dessous du point $N(a + h, f(a + h))$.



2. Pour le cas $n = 1$, la condition du deuxième point du théorème s'écrit simplement $f''(a) \geq 0$ pour tout a dans \mathbb{R} .

Pour les fonctions convexes (ou concaves) de classe \mathcal{C}^1 , la condition nécessaire d'existence d'un extremum local (voir Théorème 6) est également suffisante. Le point 1. du théorème précédent entraîne immédiatement le

Corollaire 1 Soit \mathcal{O} est ouvert convexe de \mathbb{R}^n et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe (resp. concave). Si $a \in \mathcal{O}$ vérifie $\nabla f(a) = 0$ alors a est un minimum (resp. maximum) global de f .

6.4 Optimisation sans contrainte : les conditions suffisantes du second ordre

On revient maintenant au cas général d'une fonction f définie sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n .

Théorème 8 Soit a un point critique de f .

1. Si la matrice Hessienne $\nabla^2 f(a)$ induit une forme quadratique définie positive (i.e. $h^T \nabla^2 f(a) h > 0$ pour tout h non nul), alors a est un minimum local strict.
2. Si la matrice Hessienne $\nabla^2 f(a)$ induit une forme quadratique définie négative (i.e. $h^T \nabla^2 f(a) h < 0$ pour tout h non nul), alors a est un maximum local strict.

Preuve. On considère uniquement le premier point, le deuxième se déduisant du premier en considérant la fonction $-f$. D'après l'hypothèse, toutes les valeurs propres de la matrice $\nabla^2 f(a)$ sont strictement positives. Si α désigne la plus petite valeur propre de $\nabla^2 f(a)$ (strictement positive), on a d'après le chapitre précédent (cf preuve de la Proposition 30) l'inégalité

$$h^T \nabla^2 f(a) h \geq \alpha \|h\|^2,$$

valable pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. En utilisant un développement de Taylor à l'ordre 2 et le fait que $\nabla f(a) = 0$, nous en déduisons

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(a) h + \|h\|^2 \epsilon(h) \\ &\geq \|h\|^2 \left(\frac{1}{2} \alpha + \epsilon(h) \right). \end{aligned}$$

Ainsi si $\|h\| \leq r$ pour un $r > 0$ suffisamment petit, on a $f(a+h) > f(a)$ lorsque $h \neq 0$ ce qui prouve le théorème. \square

Remarques

1. Si $n = 1$, la condition suffisante $\nabla^2 f(a)$ définie positive s'écrit tout simplement $f''(a) > 0$.
2. La réciproque du théorème ci-dessus est fautive. Par exemple pour le point 1., lorsque $n = 1$, la fonction $f : x \rightarrow x^4$ a un minimum local strict en 0 et $f''(0) = 0$. On peut en fait montrer l'implication suivante : a minimum local (pas forcément strict) $\Rightarrow \nabla^2 f(a)$ semi-définie positive (i.e $\forall h \in \mathbb{R}^n, h^T \nabla^2 f(a) h \geq 0$).
3. On a vu au chapitre précédent (cf Proposition 30) que $\nabla^2 f(a)$ était définie positive si et seulement si ses propres étaient strictement positives. En pratique, on peut donc calculer les valeurs propres de la Hessienne et regarder leur signe. Mais on ne pourra rien conclure si une des valeurs propres est nulle (penser à la fonction cube sur \mathbb{R}).
4. On peut aussi utiliser le critère sur les mineurs (cf Proposition 31 du Chapitre 5) qui évite le calcul des valeurs propres. Lorsque tous les mineurs principaux dominants de $\nabla^2 f(a)$ sont strictement positifs, alors on pourra conclure que a est un minimum local. Lorsque les mineurs principaux dominants ont un signe qui alterne avec $\nabla^2 f(a)_{11} < 0$, alors on peut conclure que $\nabla^2 f(a)$ est définie négative et donc que a est un maximum local strict pour f .
5. Si pour un point critique $a \in \mathcal{O}$, la Hessienne possède une valeur propre strictement positive et une autre strictement négative alors a n'est pas un extremum local. En effet, en considérant un vecteur propre v de norme 1 associé à une valeur propre λ on peut montrer que la fonction d'une variable réelle $g : t \mapsto f(a+tv)$ admet un minimum (resp. maximum) local strict si $\lambda > 0$ (resp. < 0). Pour le voir, il suffit d'écrire le développement limité de g à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} f(a+tv) &= g(t) \\ &= g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2} g''(0)t^2 + t^2 \epsilon(t) \\ &= f(a) + \frac{1}{2} v^T \nabla^2 f(a) v t^2 + t^2 \epsilon(t) \\ &= f(a) + \frac{\lambda t^2}{2} + t^2 \epsilon(t). \end{aligned}$$

Un cas particulier important est celui où la matrice $\nabla^2 f(a)$ ne possède pas de valeur propre nulle (ce qui signifie que son déterminant est non nul) c'est-à-dire lorsque certaines

valeurs propres sont strictement positives et toutes les autres strictement négatives : on dit que a est un point selle ou de point col (cf Figure 6.1). Au niveau des mineurs, ce cas particulier se retrouve lorsque les mineurs principaux dominants de $\nabla^2 f(a)$ vérifient $\det(\nabla^2 f(a)) \neq 0$ (dernier mineur principal dominant non nul) mais ne satisfont pas l'une ou l'autre des hypothèses de la Proposition 31 du Chapitre 5.

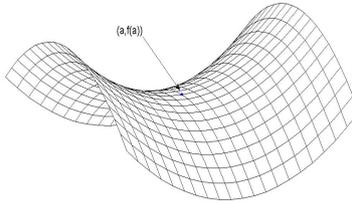


FIGURE 6.1: Point selle

Du local au global. Les résultats précédents permettent uniquement d'identifier les extrema locaux sur un ouvert \mathcal{O} . Les extrema globaux peuvent ne pas exister (c'est le cas par exemple d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$). Aussi si la fonction est définie sur un ensemble non ouvert, il faut aussi regarder comment se comporte la fonction sur le bord de son domaine de définition pour savoir si les extrema globaux existent et s'ils font partie des extrema locaux identifiés sur l'intérieur du domaine de définition.

6.5 Extrema liés : conditions du premier ordre pour des contraintes égalités

Dans tout ce paragraphe, \mathcal{O} désignera un ensemble ouvert de \mathbb{R}^n , et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On souhaite alors trouver les extrema de la fonction $f|_{\mathcal{S}}$ (restriction de la fonction f à \mathcal{S}) où \mathcal{S} est un sous-ensemble de \mathcal{O} du type

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{O} : h_1(x) = 0, h_2(x) = 0, \dots, h_p(x) = 0\},$$

pour des fonctions $h_i : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ données, $1 \leq i \leq p$. \mathcal{S} est appelé l'ensemble des contraintes. Ainsi dire que x^* est un minimum local de f sur \mathcal{S} signifie :

- $x^* \in \mathcal{S}$.
- Il existe un nombre réel $r > 0$ tel que si $x \in \mathcal{S}$ et $\|x - x^*\| < r$ alors $f(x) \geq f(x^*)$.

On énonce alors des définitions analogues à celles du paragraphe 1 pour les extrema locaux ou globaux. Là encore, un problème de maximisation se convertit en un problème de minimisation en remplaçant f par $-f$. Remarquons que les résultats des paragraphes précédents ne s'appliquent pas ici. Par exemple si $f(x, y) = x^2 + y$ et $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$, $f|_{\mathcal{S}}$ admet un minimum global strict $(0, 1)$ mais $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 1 \neq 0$. La solution consiste alors à se ramener à un problème d'optimisation sans contrainte (par exemple étudier la fonction $x \rightarrow f(x, 1)$ dans l'exemple précédent). A titre d'exemple, on pourra minimiser la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x$ sur $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 = 0\}$.

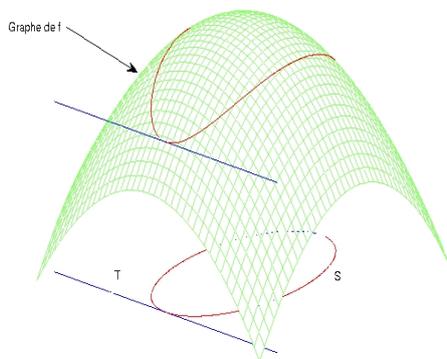
Il peut être plus délicat de se ramener à un problème d'optimisation sans contrainte en remplaçant certaines variables lorsque \mathcal{S} a une expression plus complexe (le simple exemple à une

contrainte $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ oblige à distinguer deux cas suivant le signe des coordonnées). Une solution est alors apportée par le théorème des fonctions implicites qui permet de ramener l'étude d'un extremum local sous contrainte à l'étude d'un extremum local sans contrainte en remplaçant localement une coordonnée en fonction de l'autre.

6.5.1 Le cas d'une fonction de deux variables et d'une seule contrainte

Dans ce paragraphe, on suppose $p = 1$ et $n = 2$. Nous avons le résultat suivant.

Théorème 9 (cas $p = 1$, $n = 2$) Soit $h : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^1 et $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathcal{O} : h(x, y) = 0\}$. Supposons f également \mathcal{C}^1 . Si (x^*, y^*) est un minimum local de f sur \mathcal{S} et si $\nabla h(x^*, y^*) \neq 0$, alors il existe un nombre réel λ^* tel que $\nabla f(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla h(x^*, y^*)$.



Interprétation par la droite tangente. Si $\nabla h(x^*, y^*) \neq 0$ et $\nabla f(x^*, y^*) \neq 0$, la tangente T à \mathcal{S} au point (x^*, y^*) est donnée par

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \partial_1 h(x^*, y^*) (x - x^*) + \partial_2 h(x^*, y^*) (y - y^*) = 0\},$$

alors que le plan tangent P au graphe de f au point $(x^*, y^*, f(x^*, y^*))$ est

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - f(x^*, y^*) = \partial_1 f(x^*, y^*) (x - x^*) + \partial_2 f(x^*, y^*) (y - y^*)\}.$$

Ainsi l'égalité $\nabla f(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla h(x^*, y^*)$ signifie

$$((x, y, z) \in P, (x, y) \in T) \Rightarrow z = f(x^*, y^*).$$

Le long de la droite tangente à la courbe de contrainte \mathcal{S} , les points du plan tangent forment une droite parallèle au plan (Oxy) .

Interprétation en utilisant les lignes de niveau. Sur la figure 6.2, on a représenté des lignes de niveau de la fonction $f(x, y) = xy$ (c'est à dire des courbes d'équations $xy = k$ pour certaines valeurs de k). Si (x^*, y^*) est un maximum local pour f sur l'ensemble contraint, les points situés autour de ce point et sur l'ensemble contraint doivent appartenir à des lignes de niveau inférieur (i.e k plus petit). Le Théorème 9 indique qu'en ce point, les courbes d'équations $xy = 0.5$ et $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ont alors la même droite tangente (ou des vecteurs gradients colinéaires, ce qui revient au même).

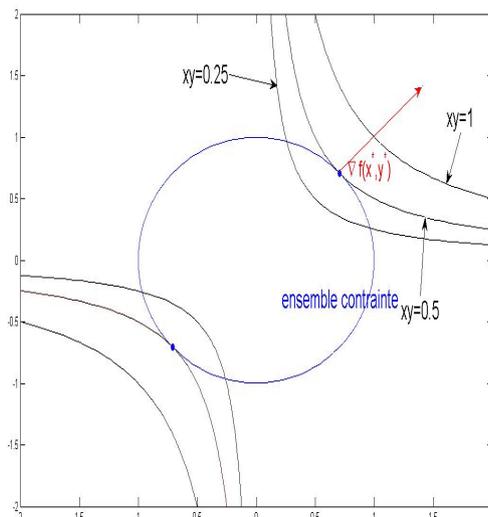


FIGURE 6.2: $f(x, y) = xy$ et $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Démonstration du Théorème 9. Supposons par exemple, $\partial_2 h(x^*, y^*) \neq 0$ (le cas $\partial_1 h(x^*, y^*) \neq 0$ se traite de façon similaire). Le théorème des fonctions implicites assure l'existence de deux intervalles ouverts I et J tels que $(x^*, y^*) \in I \times J \subset \mathcal{O}$ et d'une fonction $\phi : I \rightarrow J$, \mathcal{C}^1 et telle que

$$\{(x, y) \in I \times J : h(x, y) = 0\} = \{(x, \phi(x)) : x \in I\}.$$

Ainsi x^* est un minimum local de la fonction $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $k(x) = f(x, \phi(x))$. Donc nécessairement

$$k'(x^*) = \partial_1 f(x^*, y^*) + \partial_2 f(x^*, y^*) \times \phi'(x^*) = 0. \quad (6.1)$$

Comme le théorème des fonctions implicites assure que $\phi'(x^*) = -\partial_1 h(x^*, y^*) : \partial_2 h(x^*, y^*)$, l'égalité (6.1) conduit à $\partial_1 f(x^*, y^*) = \lambda^* \partial_1 h(x^*, y^*)$ avec $\lambda^* = \partial_2 f(x^*, y^*) / \partial_2 h(x^*, y^*)$. De plus il est immédiat que $\partial_2 f(x^*, y^*) = \lambda^* \partial_2 h(x^*, y^*)$ et donc le théorème est démontré. \square

Exercice. Appliquer le résultat précédent à $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$ et $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Montrer en utilisant le Théorème 2 que le maximum est atteint pour les deux points $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et que le minimum est atteint pour les deux points $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Remarque. Comme pour le cas sans contrainte, les points (x^*, y^*) satisfaisant $\nabla h(x^*, y^*) \neq 0$ et $\nabla f(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla h(x^*, y^*)$ pour un certain λ^* ne sont pas forcément des extremums. Un travail supplémentaire est nécessaire pour étudier la nature de ces points (voir paragraphe suivant).

Interprétation du coefficient λ^* . Supposons que le problème de minimisation de $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ sous la contrainte $c(x, y) = b$ admette une unique solution $(x^*(b), y^*(b))$ et que cette solution soit de classe \mathcal{C}^1 par rapport à b . Soit $\lambda^*(b)$ le multiplicateur de Lagrange associé. On

peut remarquer qu'en posant $h(x, y) = c(x, y) - b$, on se retrouve dans la situation du cours et que $\nabla h(x, y) = \nabla c(x, y)$ tout $(x, y) \in \mathcal{O}$. Alors nous avons d'une part les égalités

$$\begin{aligned} \frac{d}{db} f(x^*(b), y^*(b)) &= \partial_1 f(x^*(b), y^*(b)) \frac{dx^*}{db}(b) + \partial_2 f(x^*(b), y^*(b)) \frac{dy^*}{db}(b) \\ &= \lambda^*(b) \partial_1 h(x^*(b), y^*(b)) \frac{dx^*}{db}(b) + \lambda^*(b) \partial_2 h(x^*(b), y^*(b)) \frac{dy^*}{db}(b) \end{aligned}$$

et d'autre part, en dérivant l'égalité $c(x^*(b), y^*(b)) = b$:

$$1 = \partial_1 c(x^*(b), y^*(b)) \frac{dx^*}{db}(b) + \partial_2 c(x^*(b), y^*(b)) \frac{dy^*}{db}(b).$$

On en déduit que

$$\lambda^*(b) = \frac{d}{db} f(x^*(b), y^*(b)). \quad (6.2)$$

En d'autres termes, $\lambda^*(b)$ s'interprète comme la variation approximative de la valeur minimale de $f|_{\mathcal{S}}$ lorsque on augmente d'une unité la valeur de b . Par exemple dans l'exemple donné dans le Chapitre 1, on cherchait à minimiser la surface extérieure d'un cylindre à volume fixé. Si on convertit la surface en prix (prix du métal), $\lambda^*(b)$ donne approximativement la variation du prix lorsque le volume du cylindre augmente d'une unité.

6.5.2 Cas général

Le théorème précédent se généralise au cas de n variables et p contraintes.

Théorème 10 *On suppose que f, h_1, \dots, h_p sont des fonctions réelles \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n et soit*

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{O} : h_1(x) = 0, \dots, h_p(x) = 0\}.$$

Supposons que x^ soit un extremum local de f sur \mathcal{S} et que $\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_p(x^*)$ soient des vecteurs linéairement indépendants. Alors il existe des nombres réels $\lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*$, appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que*

$$\nabla f(x^*) = \lambda_1^* \nabla h_1(x^*) + \dots + \lambda_p^* \nabla h_p(x^*). \quad (6.3)$$

Les points $x^ \in \mathcal{S}$ pour lesquels il existe des nombres réels $\lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*$ tels que l'égalité 6.3 soit vérifiée sont appelés points stationnaires du problème d'optimisation sous contrainte.*

Remarques

- Ce résultat est immédiat si $p = n$, car le système $\{\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_p(x^*)\}$ est un système libre de n vecteurs de \mathbb{R}^n donc une base.
- Lorsque $p > n$, les vecteurs $\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_p(x^*)$ ne peuvent pas être linéairement indépendants et le théorème 10 ne s'applique pas.
- Remarquons que l'hypothèse d'indépendance linéaire assure que les coefficients $\lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*$ sont uniques.
- Remarquons que le cas de contraintes affines avec

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{O} : Ax - b = 0\},$$

pour une matrice A de taille (p, n) et $b \in \mathbb{R}^p$, l'indépendance linéaire des vecteurs gradients signifie que le rang de la matrice A est p ($\leq n$) et donc que les équations du système $Ax = b$ ne sont pas liées entre elles ou incompatibles.

6.5.3 Le point de vue du Lagrangien

Soient f, h_1, \dots, h_p des fonctions réelles \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n et

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{O} : h_1(x) = 0, \dots, h_p(x) = 0\}.$$

Soit \mathcal{P} le problème d'optimisation sous contrainte associé, c'est à dire la recherche des extremums de $f|_{\mathcal{S}}$. On appelle Lagrangien la fonction \mathcal{L} définie sur $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^p$ par

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^p \lambda_i h_i(x).$$

Le lien entre le Lagrangien et le problème d'optimisation sous contrainte est expliqué dans la proposition suivante.

Proposition 32 *Un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ est un point stationnaire pour le problème \mathcal{P} si et seulement si il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$ tel que (x^*, λ^*) soit un point critique du Lagrangien (c'est à dire tel que $\nabla \mathcal{L}g(x^*, \lambda^*) = 0$)*

Preuve. Un point (x^*, λ^*) est un point critique du Lagrangien si et seulement si

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i}(x^*, \lambda^*) = h_i(x^*) = 0, \quad 1 \leq i \leq p,$$

et

$$\nabla_x f(x^*) - \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \nabla_x h_i(x^*) = 0.$$

On voit donc que (x^*, λ^*) est un point critique du Lagrangien si et seulement si x^* est un point stationnaire du problème \mathcal{P} , associé au vecteur des multiplicateurs de Lagrange λ^* . \square

Avant de passer aux conditions suffisantes du second ordre, nous présentons deux cas pour lesquels les conditions du premier ordre que nous avons données sont suffisantes pour déterminer les extrema globaux du problème d'optimisation sous contrainte. Le premier cas concerne la minimisation d'une fonction convexe sous des contraintes affines.

Théorème 11 *On suppose la fonction f convexe (resp. concave) et de classe \mathcal{C}^1 . Soient A une matrice de taille (p, n) et de rang p et b un vecteur de \mathbb{R}^p . Si x^* est un point stationnaire du problème d'optimisation de f sous la contrainte $Ax = b$, alors x^* est un minimum global (resp. maximum global) pour ce problème.*

Preuve. On considère le cas convexe. Soient λ^* le multiplicateur de Lagrange associé à x^* et g la fonction définie sur \mathcal{O} par

$$g(x) = \mathcal{L}(x, \lambda^*) = f(x) - (\lambda^*)^T (Ax - b).$$

Alors g est une fonction convexe (en tant que somme de fonctions convexes) et x^* est un point critique de g . D'après le résultat sur l'optimisation sans contrainte des fonctions convexes, x^* est un minimum global de g . Comme on a l'égalité $g(x) = f(x)$ si $Ax = b$, on en déduit que x^* est un minimum global pour f sous la contrainte $Ax = b$. Le cas d'une fonction f concave se déduit du cas convexe en considérant la fonction $-f$. \square

Exercice. Dans \mathbb{R}^3 , trouver le point le plus proche de l'origine 0 et qui appartient aux deux plans d'équations $3x + y + z = 5$ et $x + y + z = 1$.

Le deuxième cas intéressant est le cas où l'ensemble contraint \mathcal{S} est un compact de \mathbb{R}^n (voir la Définition 26 au Chapitre 4). Dans ce cas, on obtient le théorème suivant qui est une conséquence directe du Théorème 2.

Théorème 12 *On suppose que f, h_1, \dots, h_p sont des fonctions à valeurs réelles et de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n et que l'ensemble contraint*

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{O} : h_1(x) = 0, \dots, h_p(x) = 0\}$$

est un compact de \mathbb{R}^n . Alors le problème d'optimisation sous contrainte admet un minimum global et un maximum global.

Remarque. Si $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$, il suffit juste de montrer que \mathcal{S} est un sous-ensemble borné de \mathbb{R}^n . En effet \mathcal{S} est un fermé de \mathbb{R}^n : si $(x_n)_n$ est une suite de \mathcal{S} telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$, la continuité des fonctions h_1, \dots, h_p assure que

$$h_1(x) = h_2(x) = \dots = h_p(x) = 0$$

et donc que x est dans \mathcal{S} . Ce théorème s'applique en particulier pour un ensemble contraint défini par un cercle (cf exercice précédent).

Exercice. Optimiser $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2$ sous les contraintes $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $x + y + z = 1$ (cf Figure 6.3 pour une représentation de l'ensemble contraint).

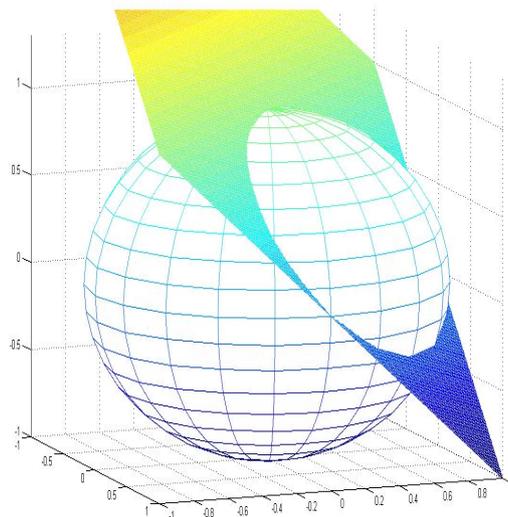


FIGURE 6.3: Ensemble contraint : intersection d'un plan et d'une sphère

6.6 Extrema liés : conditions suffisantes du second ordre pour des contraintes égalités

Nous énonçons comme dans le cas sans contrainte un théorème donnant des conditions suffisantes pour qu'un point stationnaire d'un problème sous contrainte soit un extremum local. Dans ce paragraphe, si \mathcal{L} désigne le Lagrangien associé à un problème d'optimisation sous contrainte, nous noterons $\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x, \lambda)$ la matrice Hessienne par rapport à x et pour λ fixé, i.e

$$\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \partial_{11} \mathcal{L}(x, \lambda) & \dots & \partial_{1n} \mathcal{L}(x, \lambda) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1} \mathcal{L}(x, \lambda) & \dots & \partial_{nn} \mathcal{L}(x, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Théorème 13 *En gardant les notations des paragraphes précédents, on suppose les fonctions f, h_1, \dots, h_p sont toutes de classe \mathcal{C}^2 et on note $h = (h_1, \dots, h_p)$. Soit a un point stationnaire du problème d'optimisation sous contrainte associé.*

1. *Supposons que pour tout vecteur $u \in \ker(Dh(x^*))$, on ait $u^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) u > 0$. Alors x^* est un minimum local pour le problème d'optimisation sous contrainte.*
2. *Supposons que pour tout vecteur $u \in \ker(Dh(x^*))$, on ait $u^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) u < 0$. Alors x^* est un maximum local pour le problème d'optimisation sous contrainte.*

Remarque. On peut remarquer que $\ker(Dh(x^*))$ est l'intersection des hyperplans tangents aux graphes des contraintes h_1, \dots, h_p au point x^* . C'est pour cela que $\ker(Dh(x^*))$ est appelé espace tangent à \mathcal{S} en x^* . Ainsi le Théorème 13 est basée sur le signe de la forme quadratique associée à $\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$ mais restreinte à cet espace tangent.

Preuve du théorème dans la cas $n = 2$ et $p = 1$. On est dans le cas où il y a une seule contrainte et deux variables. Soit (x^*, y^*) un point stationnaire pour le problème sous contrainte et λ^* le multiplicateur de Lagrange associé. Nous allons appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction h en supposant que $\partial_2 h(x^*, y^*) \neq 0$ (si c'est l'autre dérivée partielle qui est non nulle, la preuve est identique). Au voisinage de (x^*, y^*) , il existe une fonction ϕ telle que tout point (x, y) de \mathcal{S} satisfasse l'égalité $y = \phi(x)$ pour une fonction ϕ de classe \mathcal{C}^1 . Nous admettrons que ϕ est de classe \mathcal{C}^2 lorsque la fonction h l'est également. Soit g la fonction de classe \mathcal{C}^2 définie au voisinage de x^* par

$$g(x) = f(x, \phi(x)).$$

Si on montre les deux conditions $g'(x^*) = 0$ et $g''(x^*) > 0$ (resp. < 0) alors on aura montré que x^* est un minimum local (resp. maximum local) de g (d'après la condition suffisante d'extremum du second ordre pour une fonction d'une variable) et donc que le point (x^*, y^*) est un minimum local (resp. maximum local) de $f|_{\mathcal{S}}$. Calculons ces deux dérivées.

$$g'(x^*) = \partial_1 f(x^*, \phi(x^*)) + \phi'(x^*) \partial_2 f(x^*, \phi(x^*)).$$

En utilisant l'égalité $\nabla f(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla h(x^*, y^*)$ et l'expression de $\phi'(x^*)$, on déduit que nécessairement $g'(x^*) = 0$.

On a de plus

$$\begin{aligned} g''(x^*) &= \partial_{11} f(x^*, y^*) + 2\phi'(x^*) \partial_{12} f(x^*, y^*) + \phi''(x^*) \partial_2 f(x^*, y^*) + \phi'(x^*)^2 \partial_{22} f(x^*, y^*) \\ &= \partial_{11} \mathcal{L}(x^*, y^*) + 2\phi'(x^*) \partial_{12} \mathcal{L}(x^*, y^*) + \phi''(x^*) \partial_2 f(x^*, y^*) + \phi'(x^*)^2 \partial_{22} \mathcal{L}(x^*, y^*) \\ &+ \lambda^* \left(\partial_{11} h(x^*, y^*) + 2\phi'(x^*) \partial_{12} h(x^*, y^*) + \phi'(x^*)^2 \partial_{22} h(x^*, y^*) \right) \end{aligned}$$

Mais en dérivant deux fois par rapport à x l'égalité $h(x, \phi(x)) = 0$, on obtient l'égalité

$$0 = \partial_{11}h(x^*, y^*) + 2\phi'(x^*)\partial_{12}h(x^*, y^*) + \phi''(x^*)\partial_2h(x^*, y^*) + \phi'(x^*)^2\partial_{22}h(x^*, y^*),$$

ce qui donne en reportant dans l'expression de $g''(x^*)$:

$$\begin{aligned} g''(x^*) &= \partial_{11}\mathcal{L}(x^*, y^*) + 2\phi'(x^*)\partial_{12}\mathcal{L}(x^*, y^*) + \phi'(x^*)^2\partial_{22}\mathcal{L}(x^*, y^*) \\ &= (1 \quad \phi'(x^*)) \nabla_{(x,y)(x,y)}^2 \mathcal{L}(x^*, y^*, \lambda^*) \begin{pmatrix} 1 \\ \phi'(x^*) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En remarquant que le sous espace vectoriel $\ker(Dh(x^*, y^*))$ est la droite vectorielle de vecteur directeur $(1, \phi'(x^*))$, on voit que $g''(x^*) > 0$ (resp. < 0) dans le cas 1. (resp. dans le cas 2.), ce qui prouve les conclusions annoncées d'après la remarque faite au début de la preuve. \square

Retour sur l'exemple $f(x, y) = xy$, $h(x, y) = h_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Lorsque $(x^*, y^*) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ou $(x^*, y^*) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, on a $\lambda^* = \frac{1}{2}$. Comme $\ker(Dh(x^*)) = \{(k, \ell) \in \mathbb{R}^2 : \ell = -k\}$ et

$$\nabla_x^2(x^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

on a pour $u = (k, \ell) \in \ker(Dh)$:

$$u^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) u = -4h^2.$$

D'après le théorème précédent, ces deux points sont des maxima locaux, ce qui confirme le résultat déjà obtenu. On pourra vérifier que l'on retrouve également le résultat pour les deux minima.

Remarque. Il existe une méthode basée sur le calcul de certains mineurs principaux dominants d'une matrice appelée matrice Hessienne bordée et qui permet de vérifier les conditions du Théorème 13 sans avoir à calculer le noyau de $Dh(x^*)$. Cette méthode est l'analogue de celle présentée à la fin du Chapitre 5 pour déterminer le signe d'une forme quadratique. Nous renvoyons au livre de Simon & Blume, "Mathématiques pour économistes" pour cette méthode.